

(1)

放物線 $y = x^2 - x + 3a$ と直線 $y = 3ax + 2$ の交点の x 座標は、2つの方程式から y を消去して得られる x の2次方程式

$$\begin{aligned} x^2 - x + 3a &= 3ax + 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - (3a+1)x + 3a - 2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

の実数解である。 y 軸に平行でない直線上では x 座標が異なれば異なる点を表すので、 $\textcircled{1}$ をみたす実数解が常に2つ存在することを示せばよい。 $\textcircled{1}$ の判別式を D とすれば

$$\begin{aligned} D &= \{-(3a+1)\}^2 - 4(3a-2) \\ &= 9a^2 - 6a + 9 \\ &= (3a-1)^2 + 8 \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるので、 $\textcircled{1}$ は相異なる2つの実数解を持つ。よって放物線 $y = x^2 - x + 3a$ と直線 $y = 3ax + 2$ の交点は異なる2つの交点を持つ。

(証明終)

(2)

放物線と直線の交点の x 座標を α, β とする。 α, β は $\textcircled{1}$ の解であるから、解と係数の関係より

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 3a + 1 \\ \alpha\beta &= 3a - 2 \end{aligned}$$

となる。したがって、2つの交点の中点 M の y 座標は

$$\begin{aligned} \frac{(3a\alpha + 2) + (3a\beta + 2)}{2} &= \frac{3a}{2}(\alpha + \beta) + 2 \\ &= \frac{3a}{2}(3a + 1) + 2 \\ &= \frac{9}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 2 \\ &= \frac{9}{2}\left(a + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{15}{8} \end{aligned}$$

と表せる。したがって中点 M の y 座標は $a = -\frac{1}{6}$ で最小値 $\frac{15}{8}$ をとる。

(答) $\frac{15}{8}$

(3)

$f(a) = (|\alpha| + |\beta|)^2$ とおく。 $|\alpha| + |\beta| > 0, f(a) > 0$ より $|\alpha| + |\beta|$ は $f(a)$ が最小となるとき最小となる。ここで

$$\begin{aligned} f(a) &= \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 2|\alpha\beta| \\ &= (3a+1)^2 - 2(3a-2) + 2|3a-2| \end{aligned}$$

である。絶対値の中身が正であるか負であるかによって場合分けする。

[1] $a < \frac{2}{3}$ のとき

このとき

$$\begin{aligned} f(a) &= (3a+1)^2 - 4(3a-2) \\ &= 9a^2 - 6a + 9 \\ &= 9\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + 8 \end{aligned}$$

となる。よって $a < \frac{2}{3}$ における $f(a)$ の最小値は $f\left(\frac{1}{3}\right) = 8$ である。

[2] $\frac{2}{3} \leq a$ のとき

このとき

$$\begin{aligned} f(a) &= (3a+1)^2 \\ &= 9\left(a + \frac{1}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

となる。よって $\frac{2}{3} \leq a$ における $f(a)$ の最小値は $f\left(\frac{2}{3}\right) = 9$ である。

以上, [1], [2] より $f(a)$ の最小値は 8 である。したがって、 $|\alpha| + |\beta|$ の最小値は

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

である。

(答) $2\sqrt{2}$

(1)

2 が p 個, 3 が q 個現れるとする。このとき, それらの和が 15 であることから

$$2p + 3q = 15 \Leftrightarrow 2p = 3(5 - q)$$

である。2 と 3 が互いに素であるので上式より, p は 3 の倍数である。 p は 3 の倍数であることに注意するとこれを満たす負でない整数 p, q の組は $(p, q) = (6, 1), (3, 3), (0, 5)$ の 3 つのみである。それぞれの場合の加え方の場合の数を求める。

[1] $(p, q) = (6, 1)$ のとき

7 つの数のうち 3 が何番目であるかを考えると, この場合の加え方の場合の数は 7 通りである。

[2] $(p, q) = (3, 3)$ のとき

6 つの数のうち 3 つの 3 が何番目であるかを考えると, この場合の加え方の場合の数は

$${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ 通り}$$

である。

[3] $(p, q) = (0, 5)$ のとき

この場合は 5 つの 3 のみなので, 加え方は 1 通りしかない。

以上, [1], [2], [3] より求める場合の数は

$$7 + 20 + 1 = 28 \text{ 通り}$$

である。

(答) 28 通り

(2)

1 回硬貨を投げ 2 を加える確率も, 3 を加える確率もともに $\frac{1}{2}$ である。したがって, 2 と 3 の

順番を区別すると, n 回投げてある特定の順番になる確率は常に $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。したがって,

(1)の結果を用いると合計が 15 になる確率は

$$\begin{aligned} 20\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 7\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 &= \frac{40 + 7 + 4}{2^7} \\ &= \frac{51}{128} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{51}{128}$

(1)

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \int_0^2 |x^2 - 2x + 1| dx \\
 &= \int_0^2 (x-1)^2 dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} (x-1)^3 \right]_0^2 \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \int_0^2 |x(x-2)| dx \\
 &= -\int_0^2 x(x-2) dx \\
 &= -\left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_0^2 \\
 &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad f(0) = \frac{2}{3}, \quad f(1) = \frac{4}{3}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_0^2 |x^2 - 2x + (1-t)(1+t)| dx \\
 &= \int_0^2 |\{x-(1+t)\}\{x-(1-t)\}| dx
 \end{aligned}$$

と変形できる。 $0 < t < 1$ より $0 < 1-t < 1 < t+1 < 2$ である。ここで $0 \leq x < 1-t$ または $1+t \leq x \leq 2$ のとき

$$|\{x-(1+t)\}\{x-(1-t)\}| = \{x-(1+t)\}\{x-(1-t)\}$$

であり、 $1-t \leq x < 1+t$ のとき

$$|\{x-(1+t)\}\{x-(1-t)\}| = -\{x-(1+t)\}\{x-(1-t)\}$$

である。よって

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_0^{1-t} \{x-(1+t)\}\{x-(1-t)\} dx - \int_{1-t}^{1+t} \{x-(1+t)\}\{x-(1-t)\} dx \\
 &\quad + \int_{1+t}^2 \{x-(1+t)\}\{x-(1-t)\} dx \\
 &= \int_0^{1-t} \{(x-1)^2 - t^2\} dx - \int_{1-t}^{1+t} \{(x-1)^2 - t^2\} dx + \int_{1+t}^2 \{(x-1)^2 - t^2\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} (x-1)^3 - t^2 x \right]_0^{1-t} - \left[\frac{1}{3} (x-1)^3 - t^2 x \right]_{1-t}^{1+t} + \left[\frac{1}{3} (x-1)^3 - t^2 x \right]_{1+t}^2 \\
 &= \frac{1}{3} (-t)^3 - t^2 (1-t) - \frac{1}{3} (-1)^3 - \frac{1}{3} t^3 + t^2 (t+1) + \frac{1}{3} (-t^3) \\
 &\quad - t^2 (1-t) + \frac{1}{3} - 2t^2 - \frac{1}{3} t^3 + t^2 (t+1) \\
 &= \frac{8}{3} t^3 - 2t^2 + \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(t) = \frac{8}{3} t^3 - 2t^2 + \frac{2}{3}$$

(3)

$f(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= 8t^2 - 4t \\
 &= 8t \left(t - \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(t)$	0	-	0	+	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって、 $f(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ において最小値

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{8}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$