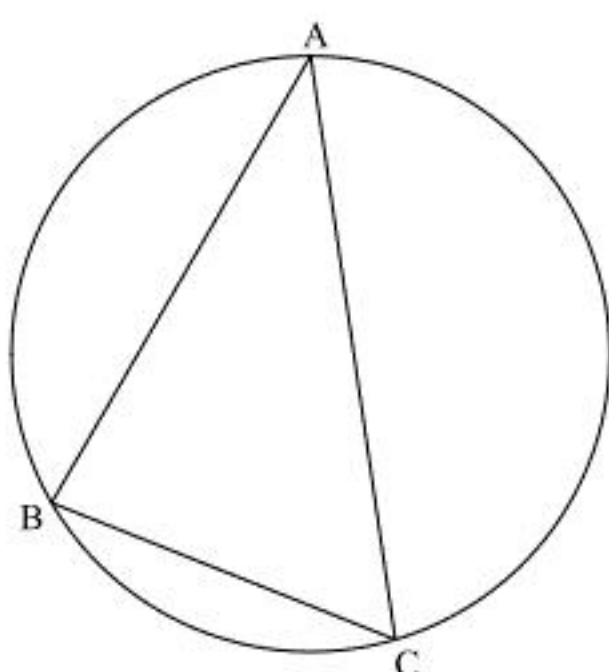


(1)



$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CA \cdot \sin \angle C \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ \\ &= 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $10\sqrt{3}$

(2)

$\triangle ABC$ において、余弦定理より

$$\begin{aligned} AB^2 &= 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 49 \\ \therefore AB &= 7 \quad (\because AB > 0) \end{aligned}$$

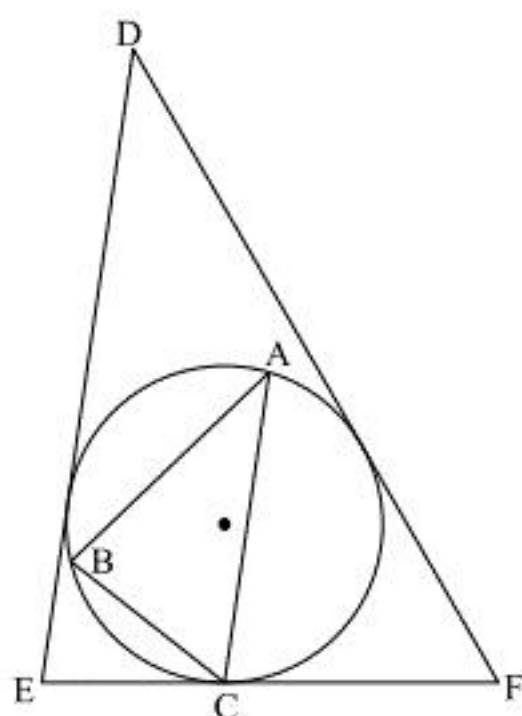
となる。よって、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、 $\triangle ABC$ において正弦定理より、

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin 60^\circ} &= 2R \\ \therefore R &= \frac{7\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

(3)



$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の相似比を $1:r$ ($r > 0$) とする。このとき、 $\triangle ABC$ の外周の長さは $5+8+7=20$ であるから、 $\triangle DEF$ の外周の長さは $20r$ である。よって、 $\triangle DEF$ の内接円の半径が $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ であるから、 $\triangle DEF$ の面積を T とすると

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot 20r \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{70\sqrt{3}}{3} r \end{aligned}$$

となる。一方、 $\triangle ABC$ の面積は $10\sqrt{3}$ であり、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の面積比は $1:r^2$ であるから、

$$T = 10\sqrt{3}r^2$$

となる。したがって、2 式より、

$$\begin{aligned} 10\sqrt{3}r^2 &= \frac{70\sqrt{3}}{3} r \\ \therefore r &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

である。すなわち、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の相似比は $3:7$ となる。

(答) $3:7$

(1)

$f_n(x) = x^{\frac{1}{n}} \log x \ (x > 0)$ より,

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \log x + x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} (\log x + n) \\ &= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \log e^n x \end{aligned}$$

である。よって、 $f_n(x) \ (x > 0)$ の増減表は以下の通りである。

x	0	...	e^{-n}	...
$f'_n(x)$		-	0	+
$f_n(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって、 $f_n(x)$ は $x = e^{-n}$ で極小値

$$\begin{aligned} f_n(e^{-n}) &= (e^{-n})^{\frac{1}{n}} (-n) \\ &= -\frac{n}{e} \end{aligned}$$

をとる。

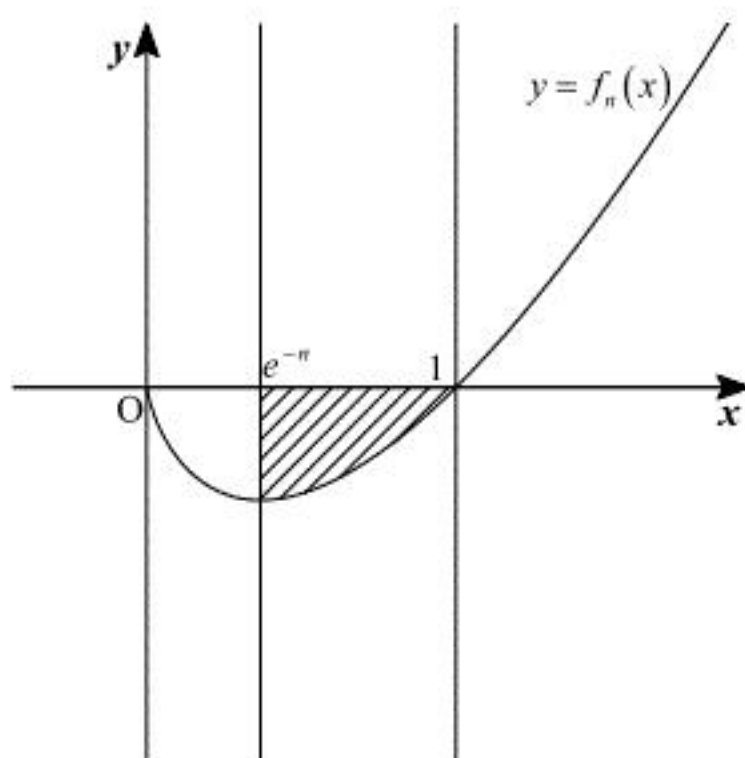
(答) $x = e^{-n}$ のとき極小値 $-\frac{n}{e}$

(2)

$x > 0$ において,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x &= 0 \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

であり、 $n \geq 1$ より、 $e^{-n} < 1$ が成り立つから、求める面積は下図における斜線部の面積である。



したがって、求める面積 S_n は、 $\frac{1}{\frac{1}{n}+1} = \frac{n}{n+1}$ に注意して、

$$\begin{aligned} S_n &= -\int_{e^{-n}}^1 f_n(x) dx \\ &= -\int_{e^{-n}}^1 \left(\frac{n}{n+1} x^{\frac{1}{n}+1} \right)' \log x dx \\ &= -\left[\frac{n}{n+1} x^{\frac{1}{n}+1} \log x \right]_{e^{-n}}^1 + \frac{n}{n+1} \int_{e^{-n}}^1 x^{\frac{1}{n}} dx \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot e^{-(n+1)} \cdot (-n) + \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \left[x^{\frac{1}{n}+1} \right]_{e^{-n}}^1 \\ &= -\frac{n^2}{n+1} e^{-(n+1)} + \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 (1 - e^{-(n+1)}) \\ &= \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \{ 1 - (n+2)e^{-(n+1)} \} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \{ 1 - (n+2)e^{-(n+1)} \}$

(3)

問題より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)e^{-(n+1)} = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \{ 1 - (n+2)e^{-(n+1)} \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^2 \left\{ 1 - (n+1)e^{-(n+1)} \cdot \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \right\} \\ &= 1^2 \cdot (1 - 0 \cdot 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$

3

(1)

点 P_1, P_2 は P_0 を原点を中心として、それぞれ $\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$ 回転させた点である。したがって

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

(答) $(x_1, y_1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2)

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ および,

$$A \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

より

$$A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

が成り立つ。ここで,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \sqrt{3} \neq 0$$

より, 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ には逆行列が存在するから,

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

(答) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(3)

$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ および,

$$B \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

より

$$B \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

が成り立つ。ここで,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = -\sqrt{3} \neq 0$$

より, 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ には逆行列が存在するから,

$$\begin{aligned}B &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

(答) $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(4)

$$\begin{aligned}AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}BA &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}BABA &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}AB + BABA &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるから, $T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{aligned}T^2 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \\ &= 2T\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって,

$$\begin{aligned}(AB + BABA)^n &= T^n \\ &= 2^{n-1} T \\ &= 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

(答) $(AB + BABA)^n = 2^{n-2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$