

(1)

2 が p 個, 3 が q 個現れるとする。このとき, それらの和が 15 であることから

$$2p + 3q = 15 \Leftrightarrow 2p = 3(5 - q)$$

である。2 と 3 が互いに素であるので上式より, p は 3 の倍数である。 p は 3 の倍数であることに注意するとこれを満たす負でない整数 p, q の組は $(p, q) = (6, 1), (3, 1), (0, 5)$ の 3 つのみである。それぞれの場合の加え方の場合の数を求める。

[1] $(p, q) = (6, 1)$ のとき

7 つの数のうち 3 が何番目であるかを考えると, この場合の加え方の場合の数は 7 通りである。

[2] $(p, q) = (3, 3)$ のとき

6 つの数のうち 3 つの 3 が何番目であるかを考えると, この場合の加え方の場合の数は

$${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ 通り}$$

である。

[3] $(p, q) = (0, 5)$ のとき

この場合は 5 つの 3 のみなので, 加え方は 1 通りしかない。

以上, [1], [2], [3] より求める場合の数は

$$7 + 20 + 1 = 28 \text{ 通り}$$

である。

(答) 28 通り

(2)

1 回硬貨を投げ 2 を加える確率も, 3 を加える確率もともに $\frac{1}{2}$ である。したがって, 2 と 3 の

順番を区別すると, n 回投げてある特定の順番になる確率は常に $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。したがって,

(1)の結果を用いると合計が 15 になる確率は

$$\begin{aligned} 20\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 7\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 &= \frac{40 + 7 + 4}{2^7} \\ &= \frac{51}{128} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{51}{128}$

(1)

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CA \cdot \sin \angle C \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ \\ &= 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $10\sqrt{3}$

(2)

余弦定理より

$$\begin{aligned} AB^2 &= 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 49 \\ \therefore AB &= 7 \end{aligned}$$

となる。よって、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると正弦定理より

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin 60^\circ} &= 2R \\ \therefore R &= \frac{7\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

(3)

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の相似比を $1:r$ とする。 $\triangle ABC$ の外周の長さは $5+8+7=20$ であるので

$\triangle DEF$ の外周の長さは $20r$ である。 $\triangle DEF$ の内接円の半径が $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ であることより $\triangle DEF$

の面積を T とすると

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot 20r \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{70\sqrt{3}}{3} r \end{aligned}$$

となる。一方 $\triangle ABC$ の面積は $10\sqrt{3}$ であり、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の面積比は $1:r^2$ であるので

$$T = 10\sqrt{3} r^2$$

である。したがって

$$\begin{aligned} 10\sqrt{3} r^2 &= \frac{70\sqrt{3}}{3} r \\ \therefore r &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

となる。すなわち $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の相似比は $3:7$ となる。

(答) $3:7$

3

(1)

$f_n(x) = x^{\frac{1}{n}} \log x$ を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{df_n(x)}{dx} &= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \log x + x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} (\log x + n) \\ &= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \log e^n x\end{aligned}$$

となる。よって、 $f_n(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	e^{-n}	...
$f'_n(x)$	$\times$	-	0	+
$f_n(x)$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

したがって、 $f_n(x)$ は $x = e^{-n}$ で極小となり、極小値は

$$\begin{aligned}f(e^{-n}) &= (e^{-n})^{\frac{1}{n}} (-n) \\ &= -\frac{n}{e}\end{aligned}$$

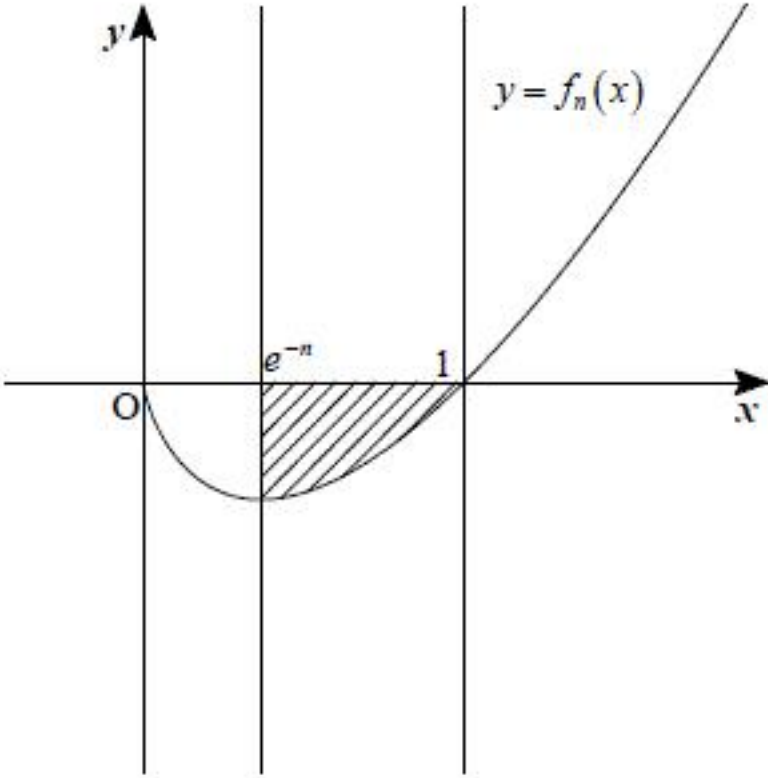
である。

(答) 極大値：なし

極小値： $-\frac{n}{e}$ ($x = e^{-n}$ のとき)

(2)

求める面積は下図斜線部の領域の面積である。



この領域が常に $y < 0$ の範囲にあることに注意すると、求める面積 S_n は

$$\begin{aligned}S_n &= \int_{e^{-n}}^1 (0 - f_n(x)) dx \\ &= - \int_{e^{-n}}^1 \left(\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \right) \log x dx \\ &= - \left[\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \log x \right]_{e^{-n}}^1 + \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \int_{e^{-n}}^1 x^{\frac{1}{n}} dx \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot e^{-n-1} \cdot (-n) + \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^2 \left[x^{1+\frac{1}{n}} \right]_{e^{-n}}^1 \\ &= -\frac{n^2}{n+1} e^{-n-1} + \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 (1 - e^{-n-1}) \\ &= \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \{ 1 - (n+2)e^{-n-1} \}\end{aligned}$$

となる。

(答) $S_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \{ 1 - (n+2)e^{-n-1} \}$

(3)

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$$

である。また $ne^{-n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ より

$$\{ 1 - (n+2)e^{-n} \} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \{ 1 - (n+2)e^{-n} \} \\ &= 1^2 \cdot 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$

4

(1)

点 P_1, P_2 は P_0 を x 軸正の方向に対してそれぞれ $120^\circ, -120^\circ$ 回転させた点である。したがって

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-120^\circ) & -\sin(-120^\circ) \\ \sin(-120^\circ) & \cos(-120^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (x_1, y_1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(2)

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ かつ } A \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

が成り立つ。ここで、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \sqrt{3} \neq 0$$

より、行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ には逆行列が存在するので、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \text{ かつ } B \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$B \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

となる。ここで、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = -\sqrt{3} \neq 0$$

より行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ には逆行列が存在するので、

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(4)

$AB, BABA$ を実際に計算する。

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である。また

$$BA = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

であるから

$$BABA = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^2 \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。したがって

$$AB + BABA = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

となる。これを $T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ とおくと

$$T^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}^2 \\ = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \\ = 2T$$

となる。したがって

$$(AB + BABA)^n = T^n \\ = 2^{n-1} T \\ = 2^{n-2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (AB + BABA)^n = 2^{n-2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$