

点 $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ から任意の 2 点を選ぶ選び方は、 ${}_{n+1}C_2 = \frac{n(n+1)}{2}$ (通り) であり、これらは同様に確からしい。ここで、 $0 \leq i < j \leq n$ なる整数 i, j に対し、2 点 P_i, P_j を選んだとする。このとき、 $1 \leq k \leq n$ なる自然数 k に対し、線分 $P_i P_j$ に線分 $P_{k-1} P_k$ が含まれるための i, j の条件は、

$$0 \leq i \leq k-1, k \leq j \leq n$$

である。よって、線分 $P_i P_j$ に線分 $P_{k-1} P_k$ が含まれる確率は、

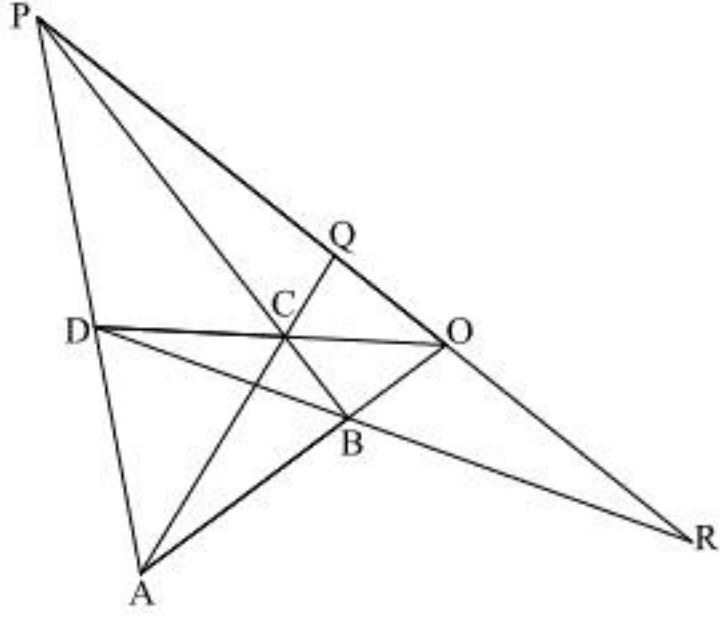
$$\frac{k(n-k+1)}{{}_{n+1}C_2} = \frac{2k(n-k+1)}{n(n+1)}$$

である。このとき、線分 $P_{k-1} P_k$ の長さは $\frac{1}{k}$ であるから、 d の期待値は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2k(n-k+1)}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{k} \right\} &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \{-k + (n+1)\} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left\{ -\frac{n(n+1)}{2} + n(n+1) \right\} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

(1)



点Bは直線CP上の点であるから、実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= t\overrightarrow{OC} + (1-t)\overrightarrow{OP} \\ &= ht\vec{a} + (kt+1-t)\vec{p}\end{aligned}\quad \cdots \cdots ①$$

と表せる。また、点Bは直線OA上の点なので、実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= s\overrightarrow{OA} \\ &= s\vec{a}\end{aligned}\quad \cdots \cdots ②$$

と表せる。ここで、 $\vec{a}$ と $\vec{p}$ が平行であるとする、 $\overrightarrow{OC}$ が $\vec{a}$ と平行になるが、これを満たす四角形ABCDは存在しないから不適である。また、 $\vec{a}=\vec{0}$ とすると、直線CD上に点Aが存在するから、4点A, B, C, Dは四角形を形成せず不適である。同様に、 $\vec{p}=\vec{0}$ とすると、直線DA上に点Bが存在するから、4点A, B, C, Dは四角形を形成せず不適である。以上より、 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{p}\neq\vec{0}$ かつ、 $\vec{a}$ と $\vec{p}$ は平行でないから、 $\vec{a}$ と $\vec{p}$ は互いに1次独立である。よって、①と②の係数を比較して、

$$\begin{cases} ht = s \\ kt+1-t = 0 \end{cases}\quad \cdots \cdots ③$$

を得る。 $k=1$ とすると、 $kt+1-t=0$ が成立せず不適である。よって、 $k\neq 1$ であるから、③より、

$$\begin{cases} s = \frac{h}{1-k} \\ t = \frac{1}{1-k} \end{cases}$$

である。したがって、

$$\overrightarrow{OB} = s\vec{a} = \frac{h}{1-k}\vec{a}$$

である。

$$(\text{答}) \overrightarrow{OB} = \frac{h}{1-k}\vec{a}$$

(2)

点Dは直線OC上の点であるから、実数 u を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= u\overrightarrow{OC} \\ &= uh\vec{a} + uk\vec{p}\end{aligned}\quad \cdots \cdots ④$$

と表せる。また、点Dは直線PA上の点であるから、実数 v を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OP} + v\overrightarrow{PA} \\ &= v\vec{a} + (1-v)\vec{p}\end{aligned}\quad \cdots \cdots ⑤$$

と表せる。よって、 $\vec{a}$ と $\vec{p}$ は1次独立であるから、④と⑤の係数を比較して、

$$\begin{aligned}\begin{cases} uh = v \\ uk = 1-v \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} uh = v \\ u(h+k) = 1 \end{cases}\end{aligned}\quad \cdots \cdots ⑥$$

を得る。このとき、 $h+k=0$ とすると、

$$\overrightarrow{OC} = h\vec{a} - h\vec{p} = h\overrightarrow{PA}$$

となる。ゆえに、 $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{PA}$ が平行、すなわち $\overrightarrow{CD}$ と $\overrightarrow{AD}$ が平行となるが、これを満たす四角形ABCDは存在しないから不適である。したがって、 $h+k\neq 0$ であるから、⑥より、

$$\begin{cases} v = \frac{h}{h+k} \\ u = \frac{1}{h+k} \end{cases}$$

である。これを⑤に代入して、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{h}{h+k}\vec{a} + \frac{k}{h+k}\vec{p}$$

となる。

$$(\text{答}) \overrightarrow{OD} = \frac{h}{h+k}\vec{a} + \frac{k}{h+k}\vec{p}$$

(3)

点Rは直線BD上の点であるから、実数 p を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OB} + q\overrightarrow{BD} \\ &= \left\{ \frac{qh}{h+k} + \frac{h(1-q)}{1-k} \right\} \vec{a} + \frac{qk}{h+k} \vec{p} \\ &= \frac{h\{h+k+q(1-2k-h)\}}{(h+k)(1-k)} \vec{a} + \frac{qk}{h+k} \vec{p}\end{aligned}\quad \cdots \cdots ⑦$$

と表せる。また

$$\overrightarrow{OR} = y\vec{p}\quad \cdots \cdots ⑧$$

である。よって、 $\vec{a}$ と $\vec{p}$ は1次独立であるから、⑦と⑧の係数を比較して、

$$\begin{cases} \frac{h\{h+k+q(1-2k-h)\}}{(h+k)(1-k)} = 0 \\ \frac{qk}{h+k} = y \end{cases}\quad \cdots \cdots ⑨$$

を得る。ここで、 $h=1-2k$ と仮定すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{h}{h+k}\vec{a} + \frac{k}{h+k}\vec{p} - \frac{h}{h+k}\vec{a} \\ &= \frac{k}{h+k}\vec{p}\end{aligned}$$

となる。このとき、直線BDと直線OP上に点Rは存在するから、点Oは直線BD上の点である。よって、点Oは直線AB上の点でもあるから、直線BD上に点Aが存在する。しかし、このとき、4点A, B, C, Dは四角形を形成せず不適である。ゆえに、 $h\neq 1-2k$ であるから、⑨より、

$$\begin{cases} q = \frac{-h-k}{1-2k-h} \\ y = \frac{-k}{1-2k-h} \end{cases}$$

である。同様に、点Qは直線CA上の点なので、実数 m を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{CA} \\ &= \{m+(1-m)h\}\vec{a} + (1-m)k\vec{p} \\ &= \{h+(1-h)m\}\vec{a} + (1-m)k\vec{p}\end{aligned}\quad \cdots \cdots ⑩$$

と表せる。また

$$\overrightarrow{OQ} = x\vec{p}\quad \cdots \cdots ⑪$$

である。よって、 $\vec{a}$ と $\vec{p}$ は1次独立であるから、⑩と⑪の係数を比較して、

$$\begin{cases} h+(1-h)m = 0 \\ (1-m)k = x \end{cases}\quad \cdots \cdots ⑫$$

を得る。ここで、 $h=1$ とすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \\ &= \vec{a} + k\vec{p} - \vec{a} \\ &= k\vec{p}\end{aligned}$$

となる。このとき、直線ACと直線OP上に点Qは存在するから、点Oは直線AC上の点である。よって、点Oは直線AB上の点でもあるから、直線AC上に点Bが存在する。しかし、このとき、4点A, B, C, Dは四角形を形成せず不適である。ゆえに、 $h\neq 1$ であるから、⑫より、

$$\begin{cases} m = \frac{-h}{1-h} \\ x = \frac{k}{1-h} \end{cases}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= (x-1)\vec{p} \\ \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} \\ &= (y-1)\vec{p}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}z = x-1 &= \frac{k+h-1}{1-h} \\ w = y-1 &= \frac{k+h-1}{1-2k-h}\end{aligned}$$

である。以上より、

$$\frac{yz}{xw} = \frac{\frac{-k}{1-h} \cdot \frac{k+h-1}{1-2k-h}}{\frac{k}{1-h} \cdot \frac{k+h-1}{1-2k-h}} = -1$$

となる。

(答) -1

(1)

 $x > 0$ において,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} \\
 &= \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2x+1}{2x(x+1)} \\
 f''(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} - \frac{2 \cdot 2x(x+1) - (2x+1)(4x+2)}{4x^2(x+1)^2} \\
 &= \frac{1}{2x^2(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f''(x) = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} \quad (x > 0)$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2 + \frac{1}{x}}{2(x+1)} \right\} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

である。また、 $x > 0$ で $f''(x) > 0$ であるから、 $f'(x)$ は $x > 0$ で単調増加である。よって、 $x > 0$ において、

$$f'(x) < 0$$

である。

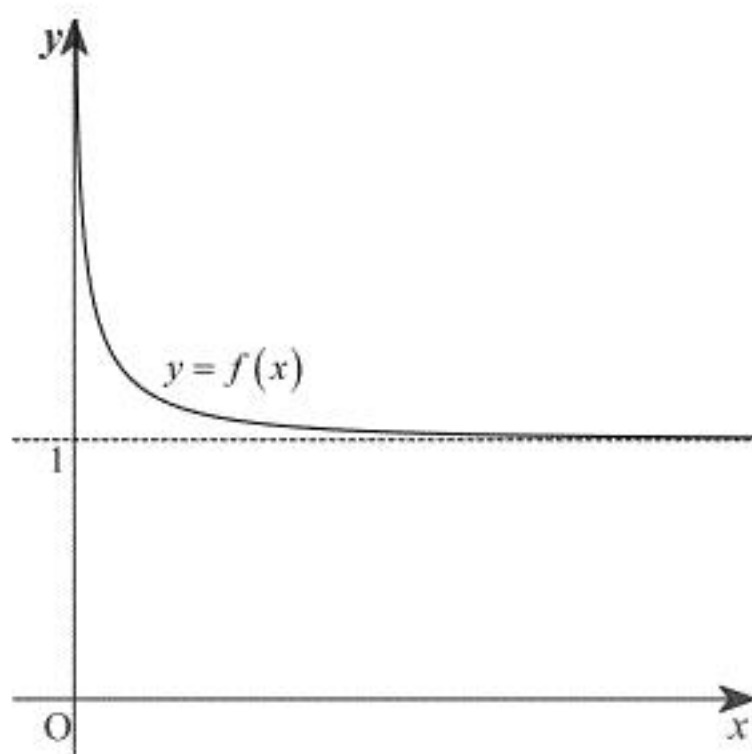
(証明終)

(3)

(2)より、 $x > 0$ で $f'(x) < 0$ かつ $f''(x) > 0$ であるから、 $y = f(x)$ ($x > 0$)は下に凸かつ単調減少である。このとき、

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right\} \\
 &= 1 \cdot \log e \\
 &= 1 \\
 \lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= +\infty
 \end{aligned}$$

である。したがって、曲線 $y = f(x)$ は直線 $y = 1$, $x = 0$ を漸近線に持つ。また、 $y = f(x)$ の概形は下図の通りである。

(答) 漸近線: $y = 1$, $x = 0$, 概形: 前図

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a-1 \\ a & a^2 \end{pmatrix}$$

とおくと、(☆)は

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表せる。ここで、 A が逆行列 A^{-1} を持つとすると、上式の両辺に左から A^{-1} をかけて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となり、このとき(☆)は解をただ1組持つ。したがって、(☆)が2組以上の解をもつためには A が逆行列をもたないこと、すなわち

$$\begin{aligned} 2 \cdot a^2 - a \cdot (a-1) &= 0 \\ \therefore a &= -1 \quad (\because a \neq 0) \end{aligned}$$

が必要である。このとき、

$$\begin{aligned} (\star) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = b \\ -x + y = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b + 2 = 0 \\ -x + y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって、この連立方程式は、 $b = -2$ のとき $-x + y = 1$ なる任意の (x, y) を解に持つ。また、 $b \neq -2$ のときは解を持たない。以上より、(☆)が2組以上の解を持つのは、 $(a, b) = (-1, -2)$ のときである。

(答) $(a, b) = (-1, -2)$

(2)

(☆)は $(x, y) = (1, 2)$ を解に持つとき、

$$\begin{cases} 2 + 2(a-1) = b \\ a + 2a^2 = 1 \end{cases}$$

が成立することが必要である。このとき、

$$a + 2a^2 = 1 \Leftrightarrow a = -1, \frac{1}{2}$$

となる。以下、 a の値に対する(☆)の値を考える。

[1] $a = -1$ のとき

(1)より、(☆)は2組以上の解を持つから、 $(x, y) = (1, 2)$ がただ1組の解とはならず不適である。

[2] $a = \frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} (\star) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{2}y = 1 \quad (\because b = 1) \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって、(☆)は $(x, y) = (1, 2)$ をただ1組の解に持つ。

以上、[1], [2]より、(☆)が $(x, y) = (1, 2)$ をただ1組の解に持つのは、 $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ のときである。

(答) $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

(3)

[1] $a = -1$ のとき

(1)より、(☆)は解を持たない、または $-x + y = 1$ なる解を持つ。したがって、(☆)が $x = y$ なる解を持つことはないから不適である。

[2] $a \neq -1, 0$ のとき

(☆)が $x = y$ なる解をもつならば、

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2y + (a-1)y = b \\ ay + a^2y = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)y = b \\ a(a+1)y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$ab = a(a+1)y = 1$$

が得られ、これが(☆)が $x = y$ なる解を持つ必要条件である。逆に、 $ab = 1$ かつ $a \neq -1, 0$ のとき、

$$2 \cdot a^2 - a \cdot (a-1) = a(a+1) \neq 0$$

であるから、(1)より A^{-1} が存在し、(☆)はただ1組の解を持つ。ゆえに、

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + a} \begin{pmatrix} a^2 & 1-a \\ -a & 2 \end{pmatrix}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 + a} \begin{pmatrix} a^2b + 1 - a \\ -ab + 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 + a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\because ab = 1) \end{aligned}$$

となり、(☆)は $x = y$ なる解を持つ。

以上、[1], [2]より、(☆)が $x = y$ なる解を持つための必要十分条件は、 $ab = 1$ かつ $a \neq -1, 0$ である。

(答) $ab = 1$ かつ $a \neq -1, 0$