

(1)

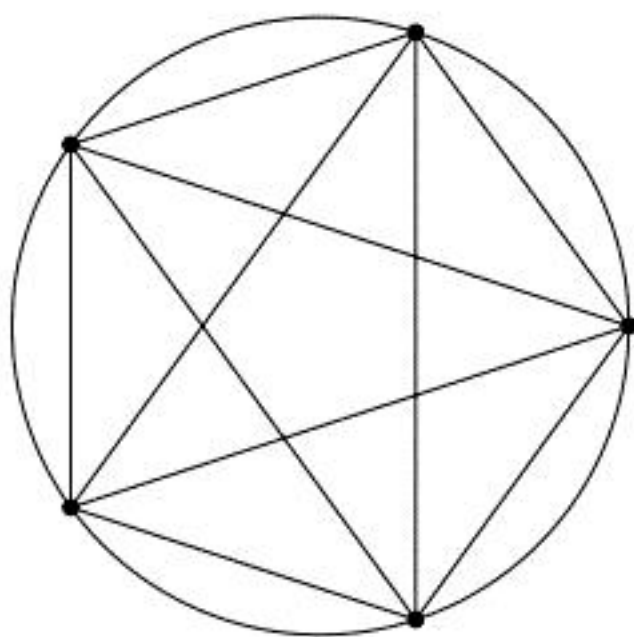
 $n=5$ のとき、線分の数は

$${}_5C_2 = 10 \text{ (本)}$$

であるから、異なる 2 本の線分の組の数は

$${}_{10}C_2 = 45 \text{ (組)}$$

であり、これらは同様に確からしい。また、下図より、交わる線分の組の数は 5 組である。



よって、異なる 2 本の線分を 1 組選ぶとき、その 2 本が円の内部で交わっている確率は、

$$\frac{5}{45} = \frac{1}{9}$$

となる。

(答) 線分の数：10 本、異なる 2 本の線分の組の数：45 組

円の内部で交わっている組の数：5 組、円の内部で交わっている確率： $\frac{1}{9}$

(2)

 $n \geq 4$ において、線分の数は

$${}_nC_2 = \frac{1}{2}n(n-1) \text{ (本)}$$

であるから、異なる 2 本の線分の組の数は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n(n-1)C_2 &= \frac{\frac{1}{2}n(n-1)\left\{\frac{1}{2}n(n-1)-1\right\}}{2} \\ &= \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1) \end{aligned}$$

より $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1)$ (組) であり、これらは同様に確からしい。一般に、円周上の異なる

4 点を選んだとき、4 点是对角の和が π となるような四角形を構成する。ゆえに、4 点から 2 点を選ぶことで得られる異なる 2 本の線分の組のうち、円の内部で交わっている線分の組はただ 1 つ存在する。また、円周上の異なる 4 点を選ぶ選び方は、 $n \geq 4$ より ${}_nC_4$ (通り) である。よって、異なる 2 本の線分を 1 組選ぶとき、その 2 本が円の内部で交わっている確率は、

$$\begin{aligned} \frac{{}_nC_4}{\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1)} &= \frac{8 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)}{4! \cdot n(n-1)(n-2)(n+1)} \\ &= \frac{n-3}{3(n+1)} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{n-3}{3(n+1)}$

(1)

$f(x)$ は $x=1, 3$ で極値を持つから、 $f'(1)=f'(3)=0$ を満たす。よって、 $f(x)$ は 3 次関数より、 $f(x)$ は 2 次関数であるから、実数 $a(a \neq 0)$ を用いて、

$$\begin{aligned} f'(x) &= a(x-1)(x-3) \\ &= a(x^2 - 4x + 3) \end{aligned}$$

と表せる。よって、両辺を積分して、

$$f(x) = \frac{a}{3}x^3 - 2ax^2 + 3ax + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} C=1 \\ \frac{4}{3}a+C=3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} C=1 \\ a=\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

であるから、よって

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$$

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}(x^2 - 4x + 3) \\ &= \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

である。よって、 $y=f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{3}{2}t^2 - 6t + \frac{9}{2} \right)(x-t) + \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + \frac{9}{2}t + 1 \\ &\Leftrightarrow y = \left(\frac{3}{2}t^2 - 6t + \frac{9}{2} \right)x - t^3 + 3t^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \left(\frac{3}{2}t^2 - 6t + \frac{9}{2} \right)x - t^3 + 3t^2 + 1$$

(3)

(2)より、 $y=f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は、 $y = \left(\frac{3}{2}t^2 - 6t + \frac{9}{2} \right)x - t^3 + 3t^2 + 1$

である。接線が $(0, 0)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} -t^3 + 3t^2 + 1 &= 0 \\ &\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - 1 = 0 \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

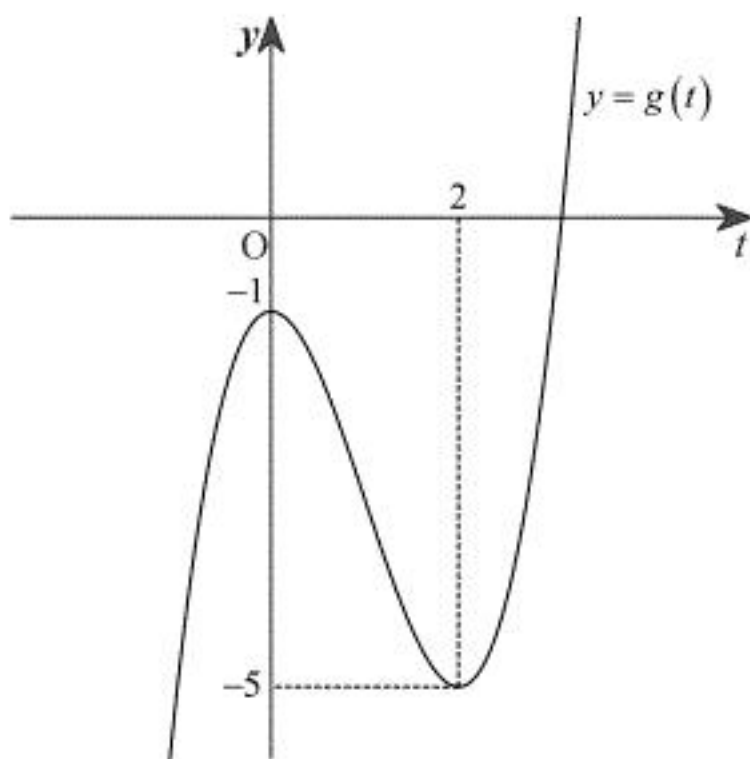
が成り立つ。3 次関数では、接線の本数と接点の個数が一致するから、求める接線の本数は、 t についての方程式①の異なる実数解の個数に一致する。このとき、 $g(t) = t^3 - 3t^2 - 1$ とおくと、 $g(t) = 0$ の異なる実数解の個数は、 $y = g(t)$ と t 軸の共有点の個数と一致する。ここで、

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t^2 - 6t \\ &= 3t(t-2) \end{aligned}$$

となるから、 $y = g(t)$ の増減表は以下の通りである。

t	...	0	...	2	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	↗	-1	↘	-5	↗

ゆえに、 $y = g(t)$ のグラフは下図の通りである。



したがって、 $y = g(t)$ と t 軸の共有点の個数は 1 つであるから、①の異なる実数解の個数は 1 つである。以上より、求める接線の本数は 1 本である。

(答) 1 本

(1)

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n - \frac{\sqrt{3}}{4}b_n \\ b_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n \end{cases}$$

を満たすから、 $C_n(a_n, b_n)$ より,

$$\begin{aligned} |\overline{OC_{n+1}}| &= \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}a_n - \frac{\sqrt{3}}{4}b_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2)} \\ &= \frac{1}{2}|\overline{OC_n}| \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} |\overline{OC_1}| &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \\ &= \sqrt{1+0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

より、数列 $\{|\overline{OC_n}|\}$ は初項1、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから、

$$|\overline{OC_n}| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である。

(答) $|\overline{OC_n}| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2)

$\overline{OC_n}$ と $\overline{OC_{n+1}}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{OC_n} \cdot \overline{OC_{n+1}}}{|\overline{OC_n}| \cdot |\overline{OC_{n+1}}|} \\ &= \frac{a_n a_{n+1} + b_n b_{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n} \\ &= \frac{\frac{1}{4}a_n^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a_n b_n + \frac{\sqrt{3}}{4}a_n b_n + \frac{1}{4}b_n^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}} \left(\because \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |\overline{OC_n}|\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $0 \leq \theta \leq \pi$ であるから、

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{3}$

(3)

(1), (2)より、 $\triangle OC_n C_{n+1}$ の面積 S_n は,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} |\overline{OC_n}| |\overline{OC_{n+1}}| \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} S_n &\leq \frac{1}{2^{2013}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} &\leq \frac{1}{2^{2013}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot 2^{2013} &\leq 2^{2n+1} \end{aligned}$$

であるから、底を2とする対数をとると、底2は1より大きいから、

$$2013 + \log_2 \sqrt{3} \leq 2n+1 \Leftrightarrow n \geq 1006 + \frac{1}{4} \log_2 3$$

となる。よって、 $1 = \log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 = 2$ より、

$$1006 + \frac{1}{4} < 1006 + \frac{1}{4} \log_2 3 < 1006 + \frac{1}{2}$$

であるから、 $S_n \leq \frac{1}{2^{2013}}$ をみたす最小の自然数 n は $n=1007$ である。

(答) $n=1007$