

(1)

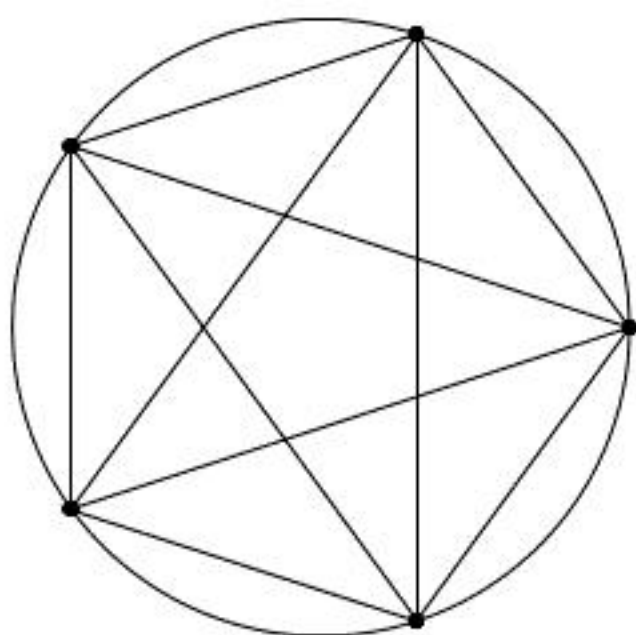
$n=5$  のとき、線分のは数は

$${}_5C_2 = 10 \text{ (本)}$$

であるから、異なる 2 本の線分の組の数は

$${}_{10}C_2 = 45 \text{ (組)}$$

であり、これらは同様に確からしい。また、下図より、交わる線分の組の数は 5 組である。



よって、異なる 2 本の線分を 1 組選ぶとき、その 2 本が円の内部で交わっている確率は、

$$\frac{5}{45} = \frac{1}{9}$$

となる。

(答) 線分のは数：10 本、異なる 2 本の線分の組の数は：45 組

円の内部で交わっている組の数は：5 組、円の内部で交わっている確率は： $\frac{1}{9}$

(2)

$n \geq 4$  において、線分のは数は

$${}_nC_2 = \frac{1}{2}n(n-1) \text{ (本)}$$

であるから、異なる 2 本の線分の組の数は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n(n-1)C_2 &= \frac{\frac{1}{2}n(n-1)\left\{\frac{1}{2}n(n-1)-1\right\}}{2} \\ &= \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1) \end{aligned}$$

より  $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1)$  (組) であり、これらは同様に確からしい。一般に、円周上の異なる

4 点を選んだとき、4 点是对角の和が  $\pi$  となるような四角形を構成する。ゆえに、4 点から 2 点を選ぶことで得られる異なる 2 本の線分の組のうち、円の内部で交わっている線分の組はただ 1 つ存在する。また、円周上の異なる 4 点を選ぶ選び方は、 $n \geq 4$  より  ${}_nC_4$  (通り) である。よって、異なる 2 本の線分を 1 組選ぶとき、その 2 本が円の内部で交わっている確率は、

$$\begin{aligned} \frac{{}_nC_4}{\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1)} &= \frac{8 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!n(n-1)(n-2)(n+1)} \\ &= \frac{n-3}{3(n+1)} \end{aligned}$$

となる。

(答)  $\frac{n-3}{3(n+1)}$

(1)

$a \neq -3$  のとき、異なる 2 点  $(-3, -3), (a, b)$  を通る直線の方程式は

$$y = \frac{b+3}{a+3}(x+3) - 3$$

$$\therefore (b+3)x - (a+3)y = 3(a-b) \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。 $a = -3$  のとき、2 点  $(-3, -3), (a, b)$  を通る直線は  $x = -3$  であり、異なる 2 点であるから  $b \neq -3$  である。このとき、 $\textcircled{1}$  に  $a = -3$  を代入すると、

$$(b+3)x = -3(b+3)$$

$$\therefore x = -3 \quad (\because b \neq -3)$$

となるから、 $\textcircled{1}$  は  $a = -3$  でも成立する。したがって、すべての実数  $a$  に対して、求める直線は  $(b+3)x - (a+3)y = 3(a-b)$  である。

(答)  $(b+3)x - (a+3)y = 3(a-b)$

(2)

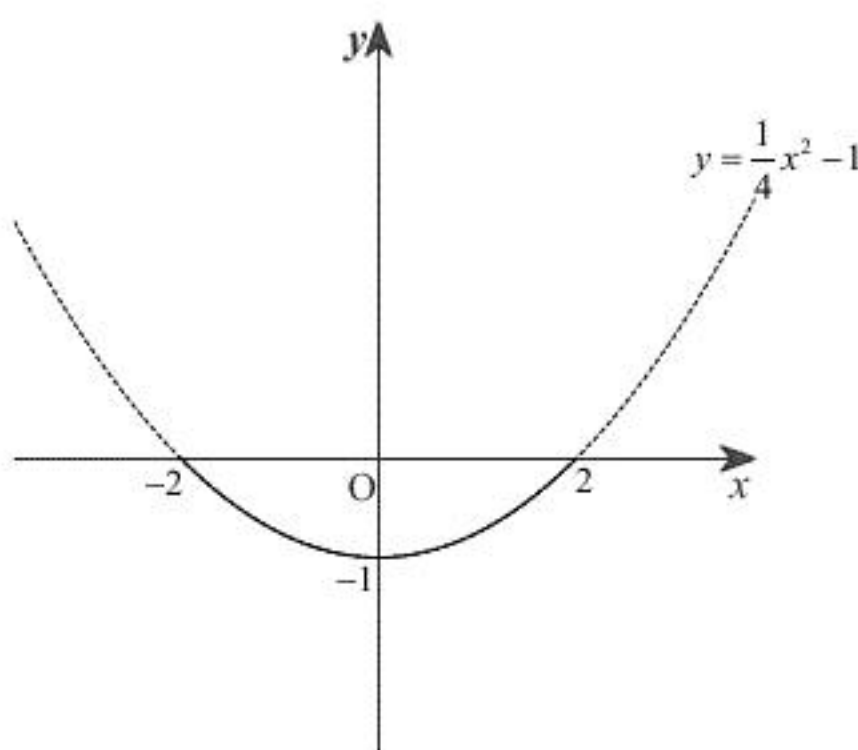
$x = 2\cos t$  より、 $t$  はすべての実数であるから、 $-2 \leq x \leq 2$  である。このもとで、 $y = -\sin^2 t$  に代入して、

$$y = -\sin^2 t$$

$$= \cos^2 t - 1$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - 1$$

となるから、題意の曲線は、 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \quad (-2 \leq x \leq 2)$  となる。したがって、グラフは下図における実線部である。



(答) 前図(実線部)

(3)

$$f(t) = \frac{-\sin^2 t - (-3)}{2\cos t - (-3)}$$

より、2 点  $(2\cos t, -\sin^2 t), (-3, -3)$  が一致することはないから、 $f(t)$  は 2 点

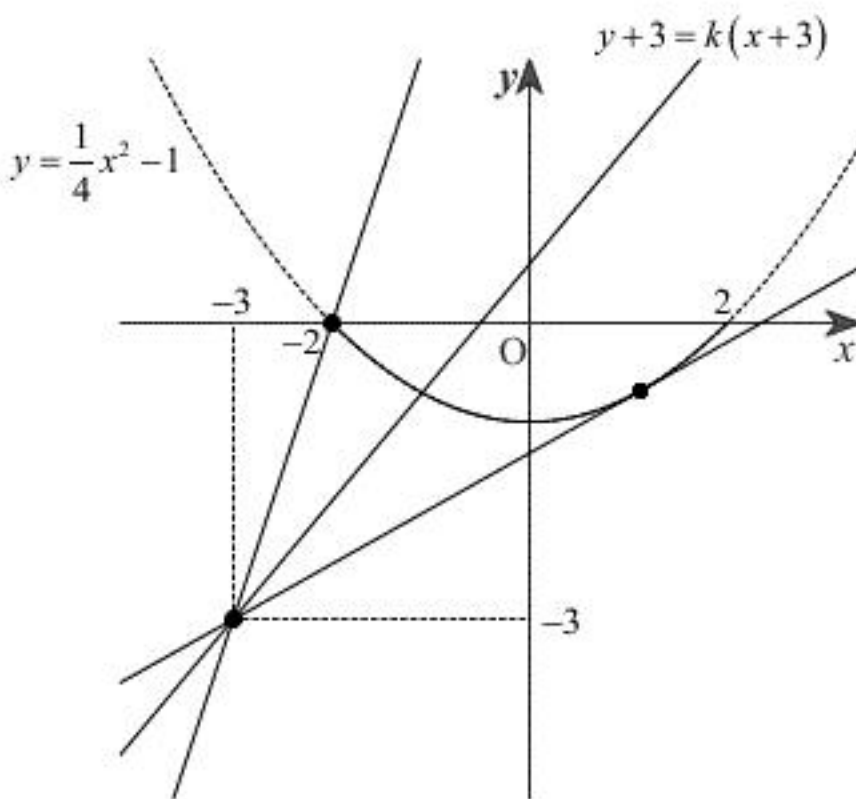
$(2\cos t, -\sin^2 t), (-3, -3)$  の傾きを表す。また、(2)より、 $(2\cos t, -\sin^2 t)$  は

$y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \quad (-2 \leq x \leq 2)$  上の点である。よって、 $f(t) = k$  とすると、 $y+3 = k(x+3)$  は

$(-3, -3)$  を通る傾き  $k$  の直線を表すから、求めるものは、

$y+3 = k(x+3)$  が  $y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \quad (-2 \leq x \leq 2)$  と共有点を持つような  $k$  の最大値および最小値

である。このとき、 $y+3 = k(x+3)$  と  $y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \quad (-2 \leq x \leq 2)$  を図示すると、下図のようになる。



したがって、図より、 $(-2, 0)$  を通るとき、 $k$  は最大となる。このとき、

$$3 = k \cdot 1 \Leftrightarrow k = 3$$

より、 $k$  の最大値は 3 である。また、 $k$  が最小となるのは、 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$  と接するときであり、

このとき、

$$k(x+3) - 3 = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4kx + 4(2-3k) = 0$$

が重解を持つ。したがって、判別式を  $D$  とすると、

$$\frac{D}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 3k - 2 = 0$$

$$\therefore k = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

である。図より、 $k$  が最小となるとき、 $k > 0$  であるから、 $k$  の最小値は  $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$  である。

(答) 最大値 3, 最小値  $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$

3

(1)

仮定より

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

である。よって

$$A \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

であり、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 \neq 0$$

より、 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ には逆行列が存在するから、

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2)

(1)より、

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

となるから、 $E$ を単位行列として、

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} A^3 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}^3 \\ &= -\frac{1}{2} E \end{aligned}$$

が得られる。よって、

$$B^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n E$$

となるから、 $P_n$ の座標は

$$\begin{aligned} B^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \therefore P_n &\left( \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, 0 \right) \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad P_n \left( \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, 0 \right)$$

(3)

 $y = x^2$ 上の点 $(p, p^2)$ における接線の方程式は、 $y' = 2x$ より、

$$\begin{aligned} y &= 2p(x - p) + p^2 \\ &= 2px - p^2 \end{aligned}$$

である。この接線が $P_n$ を通るとき、

$$\begin{aligned} 0 &= 2p \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - p^2 \\ \Leftrightarrow p \left\{ p - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} &= 0 \\ \therefore p &= 0, 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

であり、 $p = 0$ のときは、 $x$ 軸に平行な接線となるから不適である。ゆえに、 $p = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 

であり、このときの傾きは

$$a_n = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である。よって、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は初項 $a_1 = 4$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の無限等比級数であり、 $\left| -\frac{1}{2} \right| < 1$ より収束する。また、その和は、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{4}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{8}{3}$$