

(1)

作った数列が、 k と ℓ のみで構成される場合と k と ℓ 以外の数を含む場合で場合分けをする。

[1] k と ℓ のみで構成される場合

k, k, ℓ または k, ℓ, ℓ の三つを並べ替える総数だから

$$3 \times 2 = 6 \text{通り}$$

となる。

[2] k と ℓ 以外の数を含む場合

$k, \ell, (k \text{と} \ell \text{以外の数})$ の三つを並べ替える総数だから

$$(k - \ell - 1) \times 3! = 6(k - \ell - 1) \text{通りとなる}$$

となる。

以上のことより、求める総数は

$$6(k - \ell - 1) + 6 = 6(k - \ell)$$

となる。

(答) $6(k - \ell)$

(2)

$R = 0$ となるのは、三回同じ目を出すときであるから 6 通りである。 $R = 1, 2, 3, 4, 5$ については(1)の結果を利用して

$$R = 1 \text{ の場合} \cdots 6(2 - 1) \times 5 = 30 \text{通り}$$

$$R = 2 \text{ の場合} \cdots 6(3 - 1) \times 4 = 48 \text{通り}$$

$$R = 3 \text{ の場合} \cdots 6(4 - 1) \times 3 = 54 \text{通り}$$

$$R = 4 \text{ の場合} \cdots 6(5 - 1) \times 2 = 48 \text{通り}$$

$$R = 5 \text{ の場合} \cdots 6(6 - 1) \times 1 = 30 \text{通り}$$

となるから、求める期待値は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times (1 \times 30 + 2 \times 48 + 3 \times 54 + 4 \times 48 + 5 \times 30) = \frac{35}{12}$$

となる。

(答) $\frac{35}{12}$

(1)

仮定より、実数 a を用いて

$$\begin{aligned} f'(x) &= a(x-3)(x-1) \\ &= a(x^2 - 4x + 3) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

とおける。この式の両辺を積分することにより

$$f(x) = \frac{a}{3}x^3 - 2ax^2 + 3ax + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となる。ここで仮定より、 $f(0)=1$ 、 $f(1)=3$ であるから

$$f(0) = C = 1$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{a}{3} - 2a + 3a + C \\ &= \frac{4}{3}a + C = 3 \end{aligned}$$

となる。以上二式より $a = \frac{3}{2}$ となる。よって

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$$

(2)

①より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}(x^2 - 4x + 3) \\ &= \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

である。よって $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{3}{2}t^2 - 6t + \frac{9}{2} \right)(x-t) + \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + \frac{9}{2}t + 1 \\ \Leftrightarrow y &= \left(\frac{3}{2}t^2 - 6t + \frac{9}{2} \right)x - t^3 + 3t^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \left(\frac{3}{2}t^2 - 6t + \frac{9}{2} \right)x - t^3 + 3t^2 + 1$$

(3)

$y = f(x)$ に接し原点を通る直線の、 $y = f(x)$ との接点を $(t, f(t))$ とおく。 t は(2)より

$$-t^3 + 3t^2 + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす。三次関数の場合、接線と接点の数は一対一に対応するから、②式の解の個数を求めればよい。ここで $g(t) = -t^3 + 3t^2 + 1$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(t) &= -3t^2 + 6t \\ &= -3t(t-2) \end{aligned}$$

となる。よって $g(t)$ は $t=0, 2$ で極値をとる。また、

$$\begin{aligned} g(0) &= 1 \\ g(2) &= 5 \end{aligned}$$

であるから、②の解の個数は一つである。以上より、求める接線の数は一本。

(答) 一本

3

(1)

仮定より

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n - \frac{\sqrt{3}}{4}b_n \\ b_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。 $C_n(a_n, b_n)$ より

$$\begin{aligned} |\overline{OC_{n+1}}| &= \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}a_n - \frac{\sqrt{3}}{4}b_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2)} \\ &= \frac{1}{2}|\overline{OC_n}| \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n |\overline{OC_1}| \end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned} |\overline{OC_1}| &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \\ &= \sqrt{1+0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} |\overline{OC_n}| &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |\overline{OC_1}| \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2)

もとめる角度を θ とおくと

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{OC_n} \cdot \overline{OC_{n+1}}}{|\overline{OC_n}| |\overline{OC_{n+1}}|} \\ &= \frac{a_n a_{n+1} + b_n b_{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n} \\ &= \frac{\frac{1}{4}a_n^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a_n b_n + \frac{\sqrt{3}}{4}a_n b_n + \frac{1}{4}b_n^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \theta \leq \pi$ であるから

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{\pi}{3}$$

(3)

(1), (2)より $\triangle OC_n C_{n+1}$ の面積は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} |\overline{OC_n}| |\overline{OC_{n+1}}| \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \end{aligned}$$

となる。 よって $S_n \leq \frac{1}{2^{2013}}$ が満たされるとき

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} &\leq \frac{1}{2^{2013}} \\ 2^{2013} \sqrt{3} &\leq 2^{2n+1} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。 ここで $1 < \sqrt{3} < 2$ であるから,

$$2^{2013} < 2^{2013} \sqrt{3} < 2^{2014}$$

となる。 よって③を満たす最小の n は $n=1007$ である。

$$(\text{答}) \quad n=1007$$

(1)

題意より

$$f(x) = \begin{cases} x \log(1-x) & (0 \leq x) \\ -x \log(1-x) & (x < 0) \end{cases}$$

であるから

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \log(1-x) = 0$$

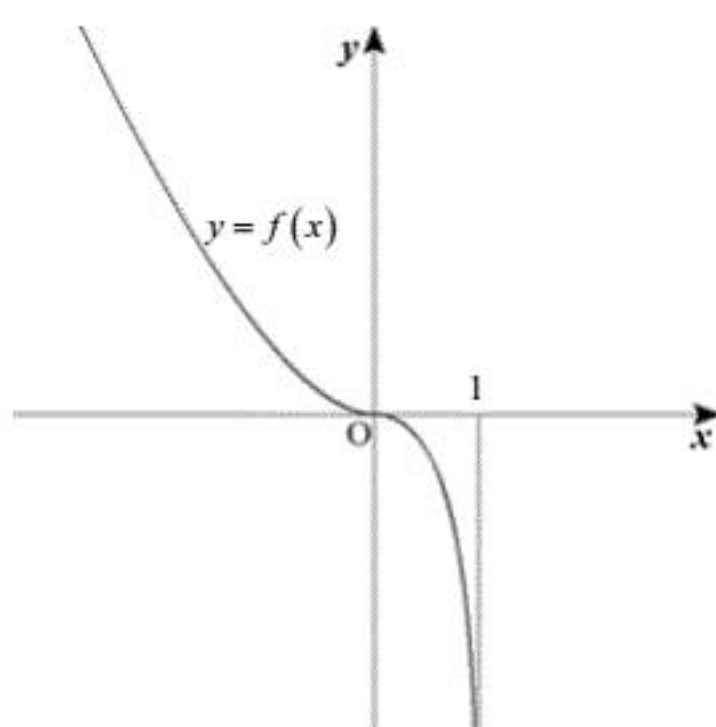
$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \{-\log(1-x)\} = 0$$

となるので、 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能である。

(証明終)

(2)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1-x} + \log(1-x) & (0 \leq x) \\ -1 + \frac{1}{1-x} - \log(1-x) & (x < 0) \end{cases}$$

である。ここで $-\frac{1}{1-x}$ と $\log(1-x)$ は単調減少であるから、 $f'(0)=0$ であることを踏まえると $f'(x) \leq 0$ となる。従って $f(x)$ は単調減少であり、そのグラフは下図のようになる。次に $y = f(x)$ と直線 $y = -x$ の交点を求める。 $|x| \log(1-x) = -x$ の解を求めればよい。 $x=0$ は明らかに解である。[1] $0 < x < 1$ のとき $\log(1-x) = -1$ であるから $x = 1 - \frac{1}{e}$ となる。これは $0 < x < 1$ を満たすから解である。[2] $x < 0$ のとき $\log(1-x) = 1$ であるから、 $x = 1 - e$ となる。これは $x < 0$ を満たす。以上のことより、交点は $(0, 0)$, $(1-e, -1+e)$, $\left(1 - \frac{1}{e}, -1 + \frac{1}{e}\right)$ の三点である。(答) 前図 $(0, 0)$, $(1-e, -1+e)$, $\left(1 - \frac{1}{e}, -1 + \frac{1}{e}\right)$

(3)

$$\begin{aligned} \int x \log(1-x) dx &= \frac{1}{2} x^2 \log(1-x) + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1-x} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \log(1-x) + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-x} - x - 1 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \log(1-x) - \frac{1}{2} \log(1-x) - \frac{1}{4} (x+1)^2 + C \end{aligned}$$

となる。ただし C は積分定数である。

$$(答) \frac{1}{2} x^2 \log(1-x) - \frac{1}{2} \log(1-x) - \frac{1}{4} (x+1)^2 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(4)

 $x < 0$ のとき $f(x) - (-x) = x\{1 - \log(1-x)\}$ である。ここで(2)より面積を求める領域は $1-e \leq x$ ≤ 0 にある。この範囲では $1-x \leq e$ から、 $f(x) \leq -x$ である。よって求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{1-e}^0 \{-x - f(x)\} dx &= \int_{1-e}^0 \{x \log(1-x) - x\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log(1-x) + \frac{1}{2} \log(1-x) - \frac{1}{4} (x+1)^2 - \frac{1}{2} x^2 \right]_{1-e}^0 \\ &= \frac{e^2}{4} - e + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \frac{e^2}{4} - e + \frac{5}{4}$$