

(1)

取り出す自然数について、 k と ℓ のみを取り出す場合と、 k と ℓ 以外の自然数を含んで取り出す場合で、場合分けをする。

[1] k と ℓ のみを取り出す場合

数列の総数は、 k, k, ℓ または k, ℓ, ℓ の3つを並べる順列の総数に等しいから、

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ (通り)}$$

となる。

[2] k と ℓ 以外の自然数を含んで取り出す場合

$\ell+1 \leq k-1 \Leftrightarrow k \geq \ell+2$ のもとで、 m を $\ell+1 \leq m \leq k-1$ を満たす自然数とする。このとき、数列の総数は、 k, ℓ, m の3つを並べる順列の総数に等しいから、

$$(k-\ell-1) \cdot 3! = 6(k-\ell-1) \text{ (通り)}$$

となる。 $k=\ell+1$ のとき、確かに0通りとなるから、 $k>\ell$ なる自然数 k に対して、

$$6(k-\ell-1) \text{ (通り)} \text{である。}$$

以上、[1]、[2]より、互いに排反であるから、求める総数は

$$6(k-\ell-1)+6=6(k-\ell)$$

となる。

(答) $6(k-\ell)$

(2)

3回サイコロを投げたとき、目の出方は $6^3=216$ (通り)であり、これらは同様に確からしい。このとき、サイコロの出る目は1から6までであるから、 $R=0, 1, 2, 3, 4, 5$ である。このうち、 $R=0$ となるのは、3回とも同じ目を出すときであるから、6通りである。また、 $R=1, 2, 3, 4, 5$ に対して、 (M, m) の組み合わせは $1 \leq M \leq 6$ に注目すると、

$$6-(R+1)+1=6-R \text{ (通り)}$$

である。したがって、 $R=1, 2, 3, 4, 5$ となる場合の数は、(1)より、

$$R=1 \text{ のとき, } 6(2-1) \cdot 5 = 30 \text{ (通り)}$$

$$R=2 \text{ のとき, } 6(3-1) \cdot 4 = 48 \text{ (通り)}$$

$$R=3 \text{ のとき, } 6(4-1) \cdot 3 = 54 \text{ (通り)}$$

$$R=4 \text{ のとき, } 6(5-1) \cdot 2 = 48 \text{ (通り)}$$

$$R=5 \text{ のとき, } 6(6-1) \cdot 1 = 30 \text{ (通り)}$$

となる。ゆえに、求める期待値は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot (0 \cdot 6 + 1 \cdot 30 + 2 \cdot 48 + 3 \cdot 54 + 4 \cdot 48 + 5 \cdot 30) = \frac{35}{12}$$

である。

(答) $\frac{35}{12}$

(1)

$a \neq -3$ のとき、異なる 2 点 $(-3, -3), (a, b)$ を通る直線の方程式は

$$y = \frac{b+3}{a+3}(x+3) - 3$$

$$\therefore (b+3)x - (a+3)y = 3(a-b) \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。 $a = -3$ のとき、2 点 $(-3, -3), (a, b)$ を通る直線は $x = -3$ であり、異なる 2 点であるから $b \neq -3$ である。このとき、 $\textcircled{1}$ に $a = -3$ を代入すると、

$$(b+3)x = -3(b+3)$$

$$\therefore x = -3 \quad (\because b \neq -3)$$

となるから、 $\textcircled{1}$ は $a = -3$ でも成立する。したがって、すべての実数 a に対して、求める直線は $(b+3)x - (a+3)y = 3(a-b)$ である。

(答) $(b+3)x - (a+3)y = 3(a-b)$

(2)

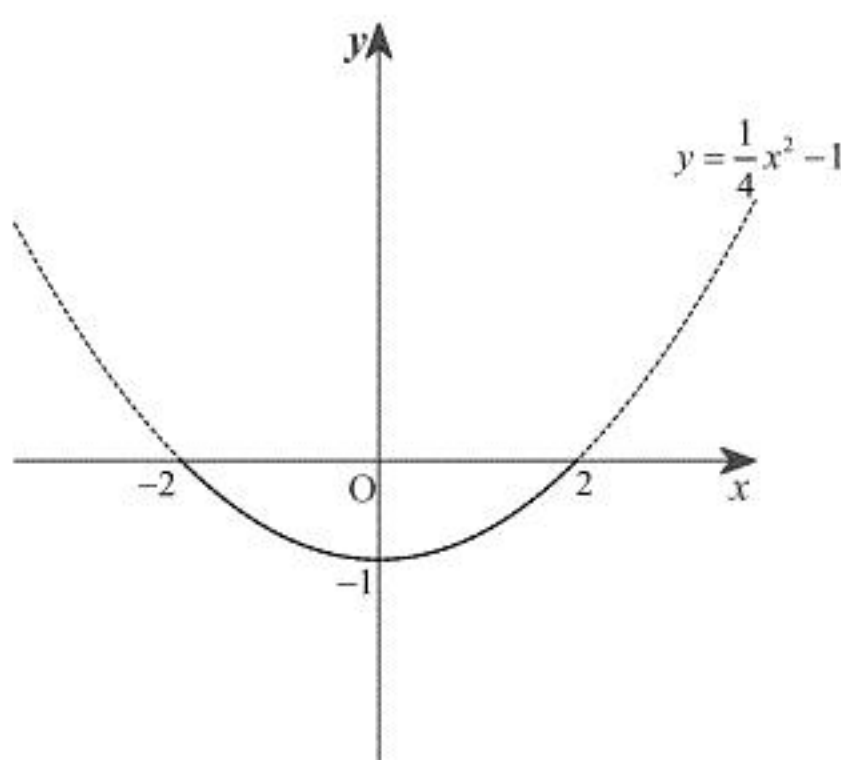
$x = 2\cos t$ より、 t はすべての実数であるから、 $-2 \leq x \leq 2$ である。このもとで、 $y = -\sin^2 t$ に代入して、

$$y = -\sin^2 t$$

$$= \cos^2 t - 1$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - 1$$

となるから、題意の曲線は、 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \quad (-2 \leq x \leq 2)$ となる。したがって、グラフは下図における実線部である。



(答) 前図(実線部)

(3)

$$f(t) = \frac{-\sin^2 t - (-3)}{2\cos t - (-3)}$$

より、2 点 $(2\cos t, -\sin^2 t), (-3, -3)$ が一致することはないから、 $f(t)$ は 2 点

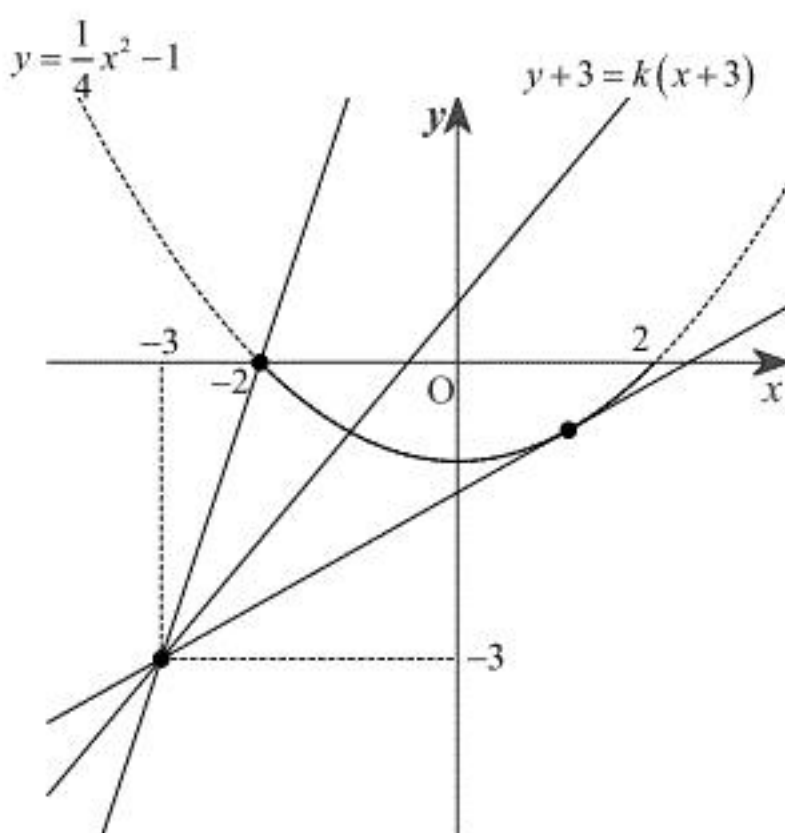
$(2\cos t, -\sin^2 t), (-3, -3)$ の傾きを表す。また、(2)より、 $(2\cos t, -\sin^2 t)$ は

$y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \quad (-2 \leq x \leq 2)$ 上の点である。よって、 $f(t) = k$ とすると、 $y + 3 = k(x + 3)$ は

$(-3, -3)$ を通る傾き k の直線を表すから、求めるものは、

$$y + 3 = k(x + 3) \text{ が } y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \quad (-2 \leq x \leq 2) \text{ と共有点を持つような } k \text{ の最大値および最小値}$$

である。このとき、 $y + 3 = k(x + 3)$ と $y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \quad (-2 \leq x \leq 2)$ を図示すると、下図のようになる。



したがって、図より、 $(-2, 0)$ を通るとき、 k は最大となる。このとき、

$$3 = k \cdot 1 \Leftrightarrow k = 3$$

より、 k の最大値は 3 である。また、 k が最小となるのは、 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ と接するときであり、

このとき、

$$k(x+3) - 3 = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4kx + 4(2-3k) = 0$$

が重解を持つ。したがって、判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 3k - 2 = 0$$

$$\therefore k = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

である。図より、 k が最小となるとき、 $k > 0$ であるから、 k の最小値は $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ である。

(答) 最大値 3, 最小値 $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$

(1)

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| &= \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2 + \{1+(-1)\}^2} = 3 \\ |\overline{CA}| &= \sqrt{\{1-(-1)\}^2 + (1-3)^2 + (-1-0)^2} = 3 \\ \overline{AB} \cdot \overline{CA} &= 4 - 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

となるから、 $\overline{AB} \neq \vec{0}$, $\overline{CA} \neq \vec{0}$ より、 $AB \perp CA$ である。したがって、 $\triangle ABC$ は、 $AB = BC$ の直角二等辺三角形である。

(証明終)

(2)

点 H は平面 α 上に存在し、3 点 A, B, C は同一直線上にないから、実数 s, t を用いて

$$\overline{OH} = \overline{OA} + s\overline{AB} + t\overline{AC}$$

と表せる。また $\overline{OH} \perp (\text{平面 } \alpha)$ より、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overline{OH} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \overline{OH} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{OA} \cdot \overline{AB} + s|\overline{AB}|^2 = 0 \\ \overline{OA} \cdot \overline{AC} + t|\overline{AC}|^2 = 0 \end{cases} \quad (\because \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1, 1, -1) \cdot (2, 1, 2) + 9s = 0 \\ (1, 1, -1) \cdot (-2, 2, 1) + 9t = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 9s + 1 = 0 \\ 9t - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} s = -\frac{1}{9} \\ t = \frac{1}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= (1, 1, -1) - \frac{1}{9}(2, 1, 2) + \frac{1}{9}(-2, 2, 1) \\ &= \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{10}{9} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad H\left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{10}{9}\right)$$

(3)

求める座標を $X(x, y, z)$ とおくと、 X は四面体 OABC に外接する球の中心であるから、点 O, A, B, C から X までの距離は全て等しい。このとき、

$$\begin{aligned} |\overline{XO}|^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ |\overline{XA}|^2 &= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 \\ |\overline{XB}|^2 &= (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \\ |\overline{XC}|^2 &= (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} |\overline{XO}|^2 = |\overline{XA}|^2 \\ |\overline{XO}|^2 = |\overline{XB}|^2 \\ |\overline{XO}|^2 = |\overline{XC}|^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (-2x+1) + (-2y+1) + (2z+1) = 0 \\ (-6x+9) + (-4y+4) + (-2x+1) = 0 \\ (2x+1) + (-6y+9) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-2z=3 \\ 3x+2y+z=7 \\ x-5y=-5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{10} \\ y=\frac{19}{10} \\ z=\frac{11}{10} \end{cases} \end{aligned}$$

であるから、求める点の座標は $\left(\frac{7}{10}, \frac{19}{10}, \frac{11}{10}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{7}{10}, \frac{19}{10}, \frac{11}{10}\right)$$

(1)

$f(x)$ の絶対値を外すと、

$$f(x) = \begin{cases} x \log(1-x) & (0 \leq x < 1) \\ -x \log(1-x) & (x < 0) \end{cases}$$

である。よって、

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \log(1-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -0} \{-\log(1-x)\} = 0$$

となるから、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ が存在する。したがって、 $y = f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である。

(証明終)

(2)

$y = f(x)$ と直線 $y = -x$ の交点の x 座標は、

$$f(x) = -x \Leftrightarrow |x| \log(1-x) = -x$$

の実数解に一致する。以下、左辺の絶対値に注目して場合分けをする。

[1] $0 \leq x < 1$ のとき

$|x| = x$ より、

$$x \log(1-x) = -x$$

$$\Leftrightarrow x \{\log(1-x) + 1\} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \log(1-x) = -1$$

$$\therefore x = 0, x = 1 - \frac{1}{e}$$

であり、 $0 < \frac{1}{e} < 1$ より $0 < 1 - \frac{1}{e} < 1$ である。したがって、 $0 \leq x < 1$ における解は、

$$x = 0, 1 - \frac{1}{e} \text{ である。}$$

[2] $x < 0$ のとき

$|x| = -x$ より、

$$-x \log(1-x) = -x$$

$$\Leftrightarrow \log(1-x) = 1 \quad (\because x \neq 0)$$

$$\therefore x = 1 - e$$

であり、 $e > 2$ より $1 - e < 0$ である。したがって、 $x < 0$ における解は、 $x = 1 - e$ である。

以上、[1], [2] より、 $y = f(x)$ と直線 $y = -x$ の交点の x 座標は、 $x = 0, 1 - e, 1 - \frac{1}{e}$ である。したが

って、交点は $y = -x$ 上の点であるから、交点の座標は、 $(0, 0), (1 - e, -1 + e), \left(1 - \frac{1}{e}, -1 + \frac{1}{e}\right)$ である。

(答) $(0, 0), (1 - e, -1 + e), \left(1 - \frac{1}{e}, -1 + \frac{1}{e}\right)$

(3)

$$\begin{aligned} \int x \log(1-x) dx &= \int \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \log(1-x) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \log(1-x) + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1-x} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \log(1-x) - \frac{1}{2} \int \left\{ (x+1) - \frac{1}{1-x} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} (x^2 - 1) \log(1-x) - \frac{1}{4} (x+1)^2 + C \end{aligned}$$

である。ただし、 C は積分定数である。

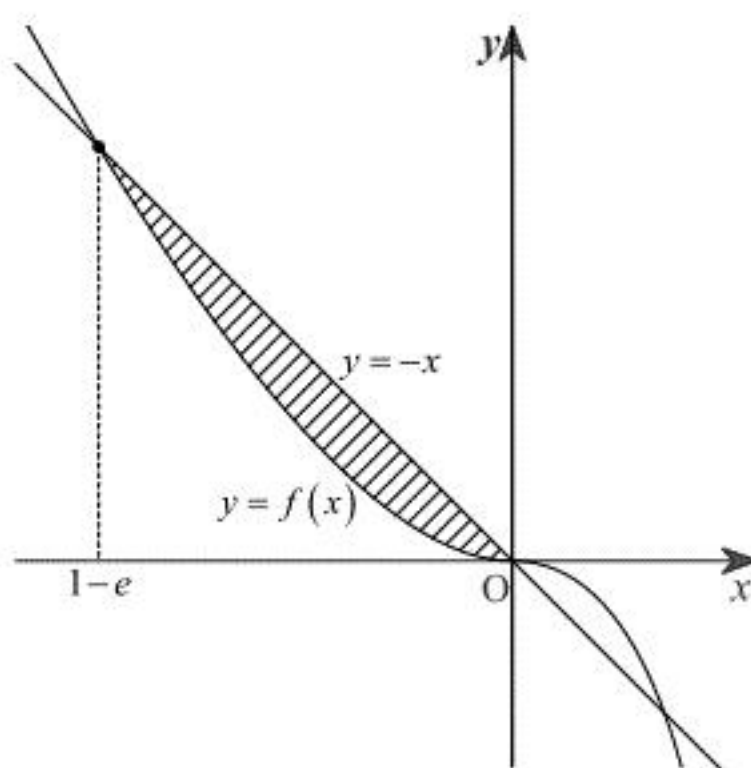
(答) $\frac{1}{2} (x^2 - 1) \log(1-x) - \frac{1}{4} (x+1)^2 + C$ (C は積分定数)

(4)

$1 - e \leq x \leq 0$ において、

$$f(x) - (-x) = x \{1 - \log(1-x)\} \geq 0$$

であり、 $x \leq 1 - e$ において、 $f(x) - (-x) \geq 0$ である。したがって、(2) より、 $x \leq 0$ において $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = -x$ で囲まれた図形は、下図における斜線部である。



よって、 S は上図における斜線部の面積であるから、(3) より、

$$\begin{aligned} S &= \int_{1-e}^0 \{-x - f(x)\} dx \\ &= \int_{1-e}^0 \{x \log(1-x) - x\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} (x^2 - 1) \log(1-x) - \frac{1}{4} (x+1)^2 - \frac{1}{2} x^2 \right]_{1-e}^0 \\ &= \frac{e^2}{4} - e + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{e^2}{4} - e + \frac{5}{4}$