

1

(1)

$n=2$ のとき、硬貨の出方は(表, 表), (表, 裏), (裏, 表), (裏, 裏)の4通りであり、ゲームが終わった後のそれぞれの場合の持ち点は、

$$1 \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} = \frac{49}{16}$$

$$1 \times \frac{7}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

$$1 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{8}$$

$$1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

となるから、持ち点のとりうる値は $\frac{49}{16}, \frac{7}{8}, \frac{1}{4}$ である。

(答) $\frac{49}{16}, \frac{7}{8}, \frac{1}{4}$

(2)

ゲームが終わったあとの持ち点は表と裏それぞれの出た回数によって決定される。 $n=4$ のとき、表が4, 3, 2, 1, 0回出る確率と各場合の持ち点は次の表のようになる。

表の出る回数	確率	持ち点
表が4回	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_4 = \frac{1}{16}$	$\left(\frac{7}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{2401}{256}$
表が3回	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_3 = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{7}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{343}{128}$
表が2回	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_2 = \frac{3}{8}$	$\left(\frac{7}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{64}$
表が1回	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_1 = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{7}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}$
表が0回	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_0 = \frac{1}{16}$	$\left(\frac{7}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

上表より持ち点が1点以下になるのは表が0, 1, 2回るときで、その確率は

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

である。

(答) $\frac{11}{16}$

(3)

$n=k$ のとき、表が i ($0 \leq i \leq k$) 回出る確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot {}_kC_i$ であり、そのときの持ち点は

$\left(\frac{7}{4}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i}$ であるから、持ち点の期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=0}^k \left(\frac{7}{4}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k {}_kC_i \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^k \left(\frac{7}{4}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} {}_kC_i \\ &= \frac{1}{2^k} \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(\frac{9}{8}\right)^k \end{aligned}$$

となる。

(答) $\left(\frac{9}{8}\right)^k$

(1)

$$f(x) = x^2 + ax + a + 3 \quad (a \text{ は実数})$$

とすると $x^2 + ax + a + 3 = 0$ が正の実数解のみを持つ条件は、 $y = f(x)$ のグラフを考えて

$$\begin{cases} \text{判別式 } D \geq 0 & \dots \textcircled{1} \\ f(0) > 0 & \dots \textcircled{2} \\ \text{軸 } x = -\frac{a}{2} > 0 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

である。①より

$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4(a + 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a - 12 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 2)(a - 6) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq -2, \quad 6 \leq a \quad \dots \textcircled{4}$$

であり、また②より

$$f(0) > 0$$

$$\Leftrightarrow a + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow -3 < a \quad \dots \textcircled{5}$$

である。③より

$$-\frac{a}{2} > 0 \Leftrightarrow a < 0 \quad \dots \textcircled{6}$$

であるから、④、⑤、⑥より求める a の範囲は

$$-3 < a \leq -2$$

である。

(答) $-3 < a \leq -2$

(2)

$$f(x) = x^2 + ax + a + 3$$

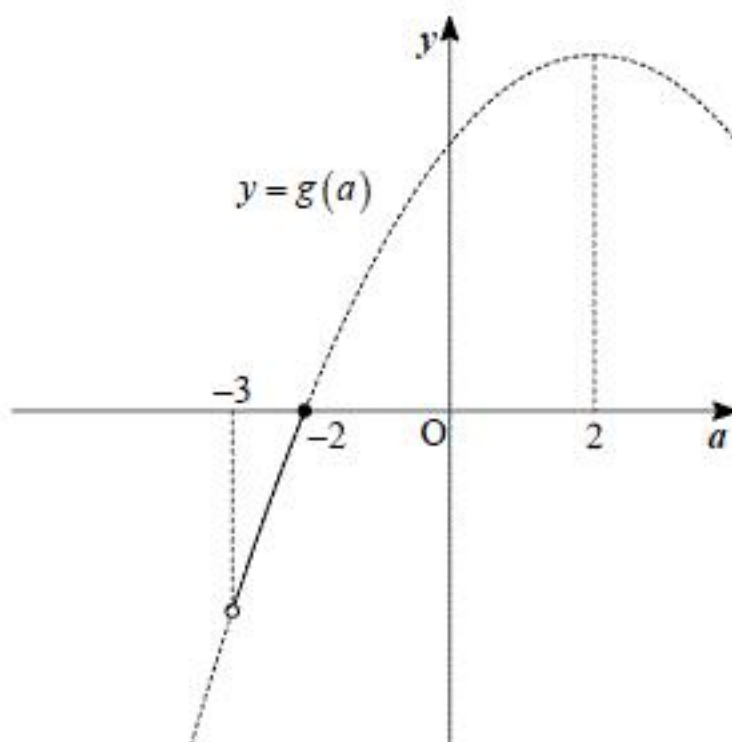
$$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a + 3$$

より $y = f(x)$ の頂点の y 座標は $g(a) = -\frac{a^2}{4} + a + 3$ である。

$$g(a) = -\frac{a^2}{4} + a + 3$$

$$= -\frac{1}{4}(a - 2)^2 + 4$$

より $y = g(a)$ ($-3 < a \leq -2$) のグラフは次のようになる。



上図より a が $-3 < a \leq -2$ を動くときの $g(a)$ の最大値は $g(-2) = 0$ である。

(答) 0

(1)

$A(a, a^2), B(b, b^2) (a < b)$ より直線 AB の傾きは $\frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b$ であるため直線 AB の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (a+b)(x-a) + a^2 \\ \Leftrightarrow y &= (a+b)x - ab \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad y = (a+b)x - ab$$

(2)

放物線 $C: y = x^2$ と直線 $AB: y = (a+b)x - ab$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \{(a+b)x - ab - x^2\} dx \\ &= -\int_a^b \{x^2 - (a+b)x + ab\} dx \\ &= -\int_a^b (x-a)(x-b) dx \\ &= \frac{(b-a)^3}{6} \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{(b-a)^3}{6}$$

(3)

$P(t, t^2) (a < t < b)$ より(1)と同様に直線 AP の方程式は $y = (a+t)x - at$ と求められるから

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_a^t \{(a+t)x - at - x^2\} dx \\ &= -\int_a^t (x-a)(x-t) dx \\ &= \frac{(t-a)^3}{6} \end{aligned}$$

である。 $S = S_1(t) + S_2(t)$ が成り立つから、 $S = \frac{(b-a)^3}{6}$ より

$$\begin{aligned} S_2(t) &= 7S_1(t) \\ \Leftrightarrow S - S_1(t) &= 7S_1(t) \\ \Leftrightarrow S &= 8S_1(t) \\ \Leftrightarrow \frac{(b-a)^3}{6} &= \frac{8(t-a)^3}{6} \\ \Leftrightarrow (b-a)^3 &= \{2(t-a)\}^3 \\ \Leftrightarrow b-a &= 2(t-a) \quad (\because a < t < b) \\ \Leftrightarrow t &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって $S_2(t) = 7S_1(t)$ を満たす t は $t = \frac{a+b}{2}$ と表せる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{a+b}{2}$$