

(1)

$n=2$ のとき、硬貨の出方は(表, 表), (表, 裏), (裏, 表), (裏, 裏)の4通りであり、ゲームが終わった後のそれぞれの場合の持ち点は、

$$1 \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} = \frac{49}{16}$$

$$1 \times \frac{7}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

$$1 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{8}$$

$$1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

となるので、持ち点のとりうる値は $\frac{49}{16}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{4}$ である。

(答) $\frac{49}{16}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{4}$

(2)

ゲームが終わったあとの持ち点は表と裏それぞれの出た回数によって決定される。 $n=4$ のとき、表が4, 3, 2, 1, 0回出る確率と各場合の持ち点は次の表のようになる。

表の出る回数	確率	持ち点
表が4回	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_4 = \frac{1}{16}$	$\left(\frac{7}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{2401}{256}$
表が3回	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_3 = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{7}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{343}{128}$
表が2回	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_2 = \frac{3}{8}$	$\left(\frac{7}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{64}$
表が1回	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_1 = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{7}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}$
表が0回	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_0 = \frac{1}{16}$	$\left(\frac{7}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

上表より持ち点が1点以下になるのは表が0, 1, 2回るときで、その確率は

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

である。

(答) $\frac{11}{16}$

(3)

$n=k$ のとき、表が i ($0 \leq i \leq k$) 回出る確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot {}_kC_i$ であり、そのときの持ち点は

$\left(\frac{7}{4}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i}$ であるから、持ち点の期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=0}^k \left(\frac{7}{4}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k {}_kC_i \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^k \left(\frac{7}{4}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} {}_kC_i \\ &= \frac{1}{2^k} \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(\frac{9}{8}\right)^k \end{aligned}$$

となる。

(答) $\left(\frac{9}{8}\right)^k$

(1)

$A(a, a^2), B(b, b^2) (a < b)$ より直線 AB の傾きは $\frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b$ であるから直線 AB の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (a+b)(x-a) + a^2 \\ \Leftrightarrow y &= (a+b)x - ab \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad y = (a+b)x - ab$$

(2)

放物線 $C: y = x^2$ と直線 $AB: y = (a+b)x - ab$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \{(a+b)x - ab - x^2\} dx \\ &= -\int_a^b \{x^2 - (a+b)x + ab\} dx \\ &= -\int_a^b (x-a)(x-b) dx \\ &= \frac{(b-a)^3}{6} \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{(b-a)^3}{6}$$

(3)

$P(t, t^2) (a < t < b)$ より(1)と同様に直線 AP の方程式は $y = (a+t)x - at$ と求められるため

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_a^t \{(a+t)x - at - x^2\} dx \\ &= -\int_a^t (x-a)(x-t) dx \\ &= \frac{(t-a)^3}{6} \end{aligned}$$

である。 $S = S_1(t) + S_2(t)$ が成り立つから、 $S = \frac{(b-a)^3}{6}$ より

$$\begin{aligned} S_2(t) &= 7S_1(t) \\ \Leftrightarrow S - S_1(t) &= 7S_1(t) \\ \Leftrightarrow S &= 8S_1(t) \\ \Leftrightarrow \frac{(b-a)^3}{6} &= \frac{8(t-a)^3}{6} \\ \Leftrightarrow (b-a)^3 &= \{2(t-a)\}^3 \\ \Leftrightarrow b-a &= 2(t-a) \quad (\because a < t < b) \\ \Leftrightarrow t &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって $S_2(t) = 7S_1(t)$ を満たす t は $t = \frac{a+b}{2}$ と表せる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{a+b}{2}$$

(1)

直線 ℓ が y 軸に平行なとき、直線 ℓ の方程式は $x=0$ であり、このとき直線 ℓ は楕円

$C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ と $(0, 3), (0, -3)$ で共有点を持つ。

直線 ℓ が y 軸に平行でないとき、直線 ℓ の傾きを m とおくと、 ℓ の方程式は $y=mx+5$ と表せ

る。直線 ℓ が楕円 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ と共有点を持つとき、 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ に $y=mx+5$ を代入して得られる x の二次方程式

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{4} + \frac{(mx+5)^2}{9} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{4m^2+9}{36}x^2 + \frac{10m}{9}x + \frac{25}{9} &= 1 \\ \Leftrightarrow (4m^2+9)x^2 + 40mx + 64 &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

の判別式を D とすると $D \geq 0$ が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (20m)^2 - (4m^2+9) \cdot 64 \\ &= 144m^2 - 576 \\ &= 144(m^2 - 4) \\ &= 144(m+2)(m-2)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow m &\leq -2, 2 \leq m\end{aligned}$$

であるから、 $y=mx+5$ ($m \leq -2, 2 \leq m$) が楕円 C と共有点を持つ。

(答) $y=mx+5$ ($m \leq -2, 2 \leq m$), $x=0$

(2)

楕円 C と直線 ℓ が接するのは、(1)で $D=0 \Leftrightarrow m=2, -2$ となるときである。 $m=2$ のとき、 $\textcircled{1}$ に代入して

$$\begin{aligned}25x^2 + 80x + 64 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5x+8)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{8}{5}\end{aligned}$$

が得られる。よって直線 ℓ の方程式が $y=2x+5$ であることより接点は $\left(-\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$ である。

$m=-2$ のとき、 $\textcircled{1}$ に代入して

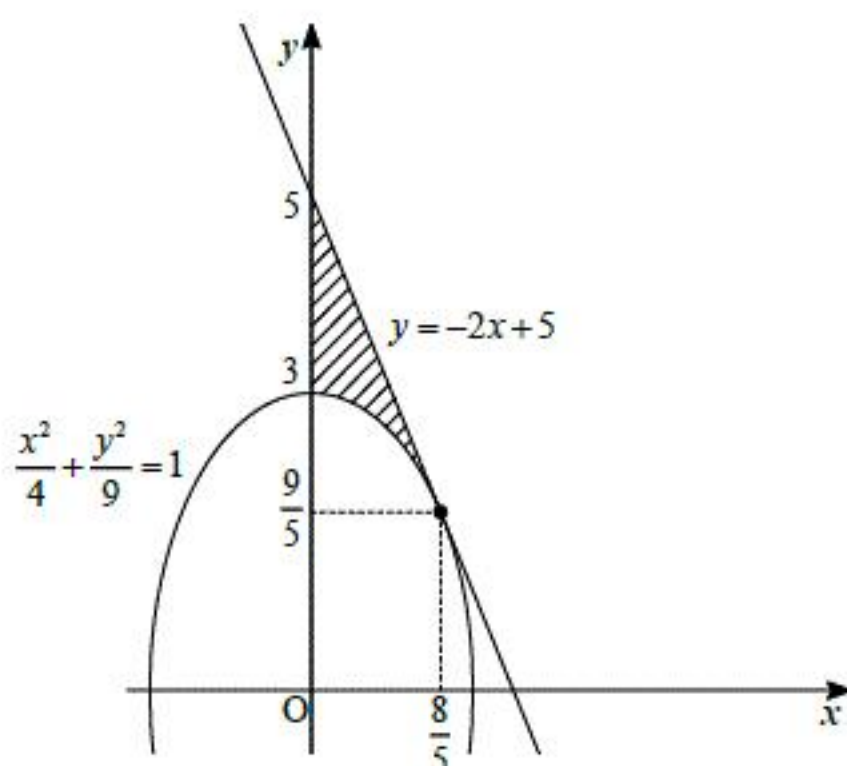
$$\begin{aligned}25x^2 - 80x + 64 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5x-8)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{8}{5}\end{aligned}$$

が得られる。よって直線 ℓ の方程式が $y=-2x+5$ であることより接点は $\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$ である。

(答) $\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right), \left(-\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$

(3)

曲線 C と直線 ℓ が第一象限で接するのは ℓ の方程式が $y=-2x+5$ で接点が $\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$ のときである。したがって C と ℓ および y 軸で囲まれた部分は以下の図の斜線部である。



V は斜線部を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積であるから、

$$\begin{aligned}y &= -2x+5 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{2}y + \frac{5}{2} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 &= -\frac{4}{9}y^2 + 4 \\ \Leftrightarrow x &= \pm \sqrt{-\frac{4}{9}y^2 + 4}\end{aligned}$$

より、楕円 C の $x \geq 0$ の部分を $x_+ = \sqrt{-\frac{4}{9}y^2 + 4}$ とおくと、 V は

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_{\frac{9}{5}}^5 \left(-\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}\right)^2 dy - \pi \int_{\frac{9}{5}}^3 x_+^2 dy \\ &= \pi \left[-\frac{2}{38} \left(-\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}\right)^3 \right]_{\frac{9}{5}}^5 - \pi \int_{\frac{9}{5}}^3 \left(-\frac{4}{9}y^2 + 4\right) dy \\ &= \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^3 - \pi \left[4y - \frac{4}{27}y^3 \right]_{\frac{9}{5}}^3 \\ &= \frac{1024}{375}\pi - \pi \left(8 - \frac{792}{125} \right) \\ &= \frac{16}{15}\pi\end{aligned}$$

と求められる。

(答) $\frac{16}{15}\pi$