

(1)

最初の状態は  $(a, b, c)$  であるから、1回目の操作で  $m=1, 2, 3, 4, 5$  を選んだあとの状態はそれぞれ  $(a, c, b), (c, b, a), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b)$  となり、いずれも  $\frac{1}{5}$  の確率である。したがって  $p_1 = 0$  である。

2回目の操作で  $(a, c, b)$  から  $(a, b, c)$  になるのは  $m=1$  を選んだ場合である。同様にして  $(c, b, a), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b)$  から  $(a, b, c)$  になるのはそれぞれ  $m=2, 3, 4, 5$  を選んだ場合である。したがって

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times 5 \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

となる。

$$(a, c, b), (c, b, a), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b)$$

(答)

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{1}{5}$$

(2)

(1)より、 $(a, b, c)$  の状態から1回操作を行って  $(a, b, c)$  に戻ることはない。また、 $(a, b, c)$  以外の状態すなわち  $(a, c, b), (c, b, a), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b)$  から1回操作を行って

$(a, b, c)$  になる確率はそれぞれ  $\frac{1}{5}$  である。したがって  $n \geq 1$  で

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \times 0 + q_n \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} q_n \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

$p_n + q_n = 1$  であるから

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{5} q_n \\ &= \frac{1}{5} (1 - p_n) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{5} \left( p_n - \frac{1}{6} \right)$$

が  $n \geq 1$  で成り立つ。したがって、 $p_1 = 0$  より  $p_n$  は

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{6} &= \left( -\frac{1}{5} \right)^{n-1} \cdot \left( p_1 - \frac{1}{6} \right) \\ \Leftrightarrow p_n &= \left( -\frac{1}{5} \right)^{n-1} \cdot \left( -\frac{1}{6} \right) + \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{5}{6} \left( -\frac{1}{5} \right)^n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(答) \quad p_n = \frac{5}{6} \left( -\frac{1}{5} \right)^n + \frac{1}{6} \quad (n \geq 1)$$

2

(1)

$$f(x) = \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ より}$$

$$f'(x) = 8 \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= 8(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = 8 \cdot 2x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (x^2+1)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= -24x(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}$$

であるから  $f(x)$  の増減凹凸表は次のようになる。

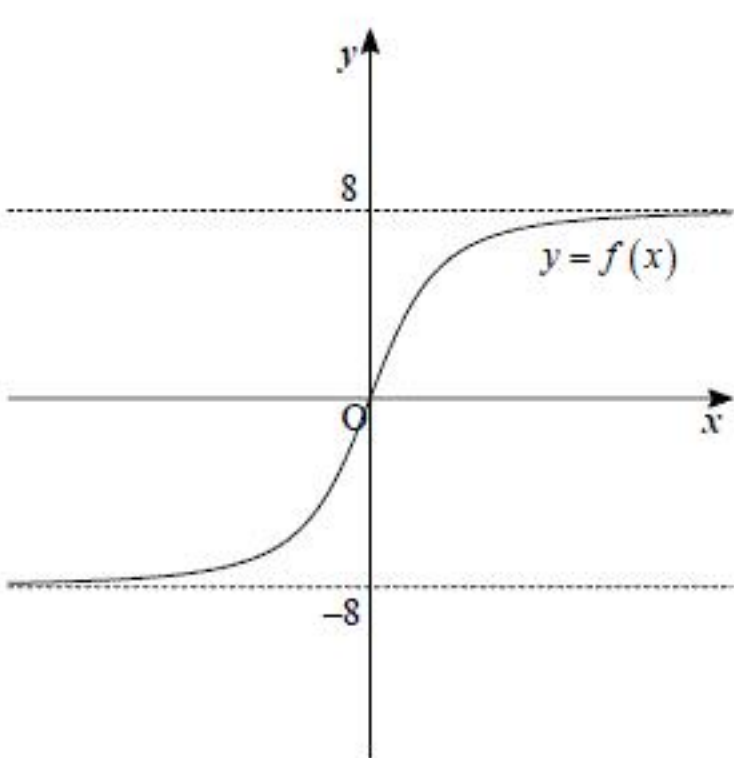
|          |            |     |            |
|----------|------------|-----|------------|
| $x$      | $\cdots$   | $0$ | $\cdots$   |
| $f'(x)$  | $+$        | $+$ | $+$        |
| $f''(x)$ | $+$        | $0$ | $-$        |
| $f(x)$   | $\nearrow$ |     | $\nearrow$ |

また,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8}{\sqrt{1+\frac{1}{(-x)^2}}} = -8$$

であるから漸近線は  $y=8$ ,  $y=-8$  である。したがって  $y=f(x)$  のグラフは次図のようになる。



(答) 前図

(2)

$y=f(x)$  のグラフと直線  $y=x+k$  がちょうど2個の共有点をもつとき,

$$f(x) = x+k$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}} = x+k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}} - x$$

より  $g(x) = x - \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}}$  とおくと,  $y=g(x)$  のグラフと  $y=k$  もちょうど2個の共有点をもつ。

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

$$= 8(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} - 1$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)^3 - 1$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 1 \right\}$$

$$= \left(\frac{2-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right) \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\}$$

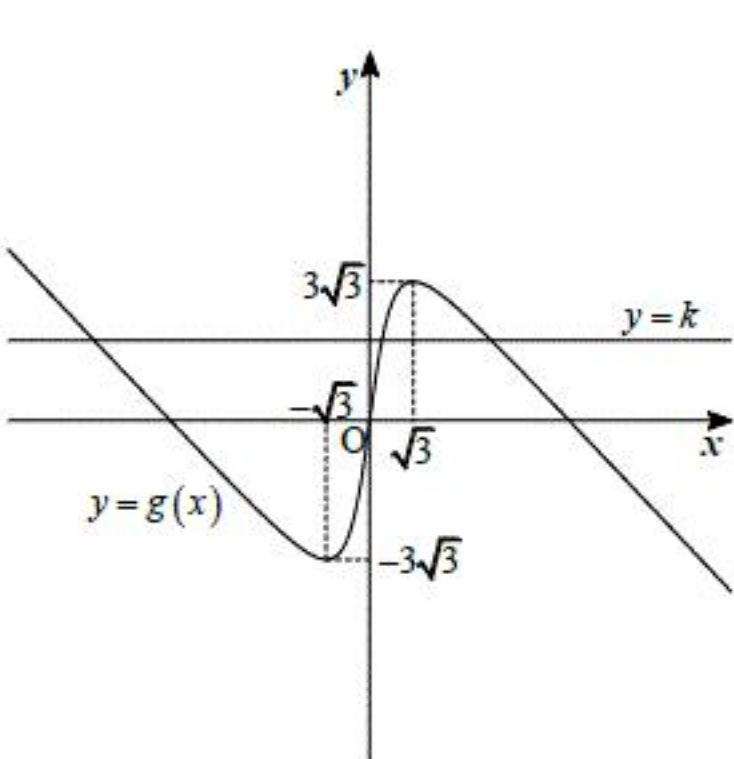
$$= \left\{ \frac{4-(x^2+1)}{(2+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} \right\} \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{-(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} \right\} \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\}$$

より  $g(x)$  の増減表は以下のようになる。

|         |            |              |            |             |            |
|---------|------------|--------------|------------|-------------|------------|
| $x$     | $\cdots$   | $-\sqrt{3}$  | $\cdots$   | $\sqrt{3}$  | $\cdots$   |
| $g'(x)$ | $-$        | $0$          | $+$        | $0$         | $-$        |
| $g(x)$  | $\searrow$ | $-3\sqrt{3}$ | $\nearrow$ | $3\sqrt{3}$ | $\searrow$ |

したがって  $y=g(x)$  と  $y=k$  のグラフは次図のようになる。

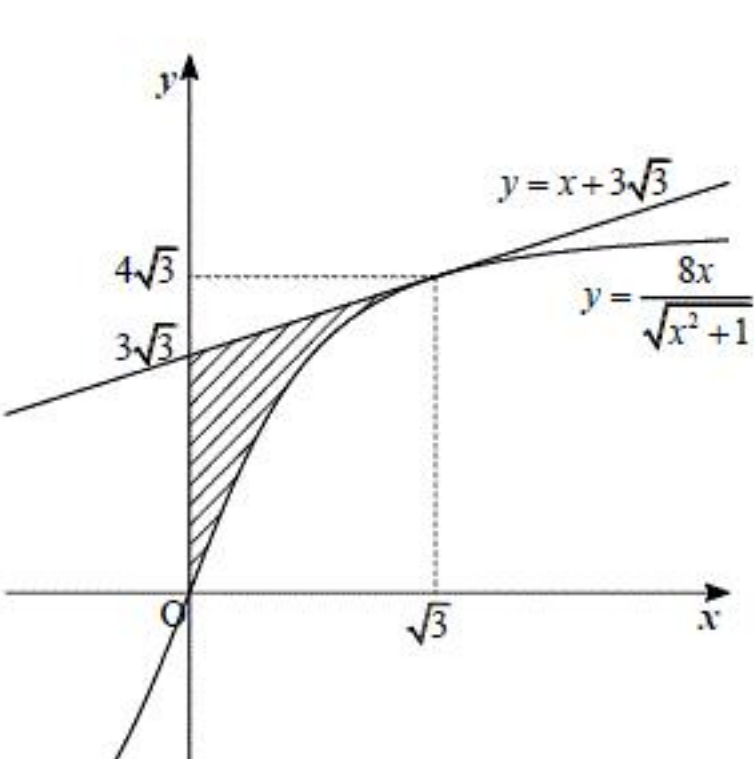


上図より共有点を2個もつのは  $k=3\sqrt{3}, -3\sqrt{3}$  のときであるが,  $k$  は正の定数であることから  $k=3\sqrt{3}$  である。

(答)  $k=3\sqrt{3}$

(3)

$k=3\sqrt{3}$  であるから,  $S$  は次図の斜線部の面積に等しい。



したがって

$$S = \int_0^{\sqrt{3}} \left( x + 3\sqrt{3} - \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{2}x^2 + 3\sqrt{3}x - 8\sqrt{x^2+1} \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5}{2}$$

と求められる。

(答)  $S = \frac{5}{2}$



(1)

$f(x)=x^2-3$  より  $f'(x)=2x$  であるから  $a_1=2$  より, 曲線  $y=f(x)$  上の点  $(a_1, f(a_1))$  におけ

る接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2a_1(x-a_1) + f(a_1) \\ \Leftrightarrow y &= 2a_1x - a_1^2 - 3 \\ \Leftrightarrow y &= 4x - 7 \end{aligned}$$

と表せる。したがって  $a_2$  は

$$0 = 4a_2 - 7 \Leftrightarrow a_2 = \frac{7}{4}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{7}{4}$$

(2)

曲線  $y=f(x)$  上の点  $(a_n, f(a_n))$  における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2a_n(x-a_n) + f(a_n) \\ \Leftrightarrow y &= 2a_nx - a_n^2 - 3 \end{aligned}$$

と表せる。したがって  $a_n, a_{n+1}$  について

$$\begin{aligned} 0 &= 2a_na_{n+1} - a_n^2 - 3 \\ \Leftrightarrow 2a_na_{n+1} &= a_n^2 + 3 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

という関係が成り立つ。ここで,  $a_n > 0$  ならば  $a_{n+1} > 0$  であり,  $a_1 = 2 > 0$  であるから, 帰納的に任意の自然数  $n$  について  $a_n > 0$  が成り立つ。よって①より  $a_n$  は

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{2a_n}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{2a_n}$$

(3)

$a_n > 0$  より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n^2 + 3}{2a_n} \\ &= \frac{a_n + \frac{3}{a_n}}{2} \end{aligned}$$

に相加相乗不等式を用いることで,  $n \geq 1$  について

$$a_{n+1} \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{3}{a_n}} = \sqrt{3}$$

が成り立つ。また,  $a_1 = 2 > \sqrt{3}$  であるから  $n \geq 1$  について  $a_n \geq \sqrt{3}$  が成り立つ。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \sqrt{3} &= \frac{a_n^2 + 3}{2a_n} - \sqrt{3} \\ &= \frac{1}{2} \left( a_n - \sqrt{3} \right) - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2a_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( a_n - \sqrt{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{a_n - \sqrt{3}}{a_n} \right) \end{aligned}$$

であるから,  $a_n \geq \sqrt{3}$  より  $\frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{a_n - \sqrt{3}}{a_n} \right) \geq 0$  が成り立つことから

$$a_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{1}{2} (a_n - \sqrt{3})$$

が成り立つ。よって, これを繰り返し用いて

$$\begin{aligned} a_n - \sqrt{3} &\leq \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} (a_1 - \sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow a_n - \sqrt{3} &\leq \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} (2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

また,  $0 \leq a_n - \sqrt{3}$  であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} (2 - \sqrt{3}) = 0$$

であるから, はさみうちの原理より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{3}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{3}$$



4

(1)

$$X = \begin{pmatrix} 3x-1 & 2x-1 \\ -3x+2 & -2x+2 \end{pmatrix}$$

$$X^n = \begin{pmatrix} P_n(x) & Q_n(x) \\ R_n(x) & S_n(x) \end{pmatrix}$$

とおくとき、数学的帰納法を利用して、 $x = \frac{1}{2}$  のとき、すべての  $n$  に対して、 $Q_n(x) = 0$  である

ことを示す。

[1]  $n=1$  のとき、

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ より } Q_1(x) = 0 \text{ が成り立つ。}$$

[2]  $n=k$  ( $k$  は自然数) のとき成り立つと仮定すると、 $Q_k(x) = 0$  より

$$X^k = \begin{pmatrix} P_k\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ R_k\left(\frac{1}{2}\right) & S_k\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= X^k \cdot X \\ &= \begin{pmatrix} P_k\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ R_k\left(\frac{1}{2}\right) & S_k\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}P_k\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}R_k\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}S_k\left(\frac{1}{2}\right) & S_k\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって  $Q_{k+1}(x) = 0$  となり  $n=k+1$  のときも成り立つ。

以上、[1], [2] より数学的帰納法から、 $x = \frac{1}{2}$  のとき、すべての  $n$  に対して、 $Q_n(x) = 0$  であることが示された。

同様に、 $x = \frac{2}{3}$  のとき、すべての  $n$  に対して、 $R_n(x) = 0$  であることを数学的帰納法を用いて示す。

[1]  $n=1$  のとき、

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ より } R_1(x) = 0 \text{ が成り立つ。}$$

[2]  $n=k$  ( $k$  は自然数) のとき成り立つと仮定すると、 $R_k(x) = 0$  より

$$X^k = \begin{pmatrix} P_k\left(\frac{2}{3}\right) & Q_k\left(\frac{2}{3}\right) \\ 0 & S_k\left(\frac{2}{3}\right) \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= X^k \cdot X \\ &= \begin{pmatrix} P_k\left(\frac{2}{3}\right) & Q_k\left(\frac{2}{3}\right) \\ 0 & S_k\left(\frac{2}{3}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_k\left(\frac{2}{3}\right) & \frac{1}{3}P_k\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}Q_k\left(\frac{2}{3}\right) \\ 0 & \frac{2}{3}S_k\left(\frac{2}{3}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって  $R_{k+1}(x) = 0$  となり  $n=k+1$  のときも成り立つ。

以上、[1], [2] より数学的帰納法から、 $x = \frac{2}{3}$  のとき、すべての  $n$  に対して、 $R_n(x) = 0$  であることが示された。

(証明終)

(2)

ケーリー・ハミルトンの定理より

$$\begin{aligned} X^2 - (x+1)X + xE &= 0 \\ \Leftrightarrow X^2 &= (x+1)X - xE \end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} X^2 + aX + bE &= O \\ \Leftrightarrow (x+1)X - xE + aX + bE &= O \\ \Leftrightarrow (a+x+1)X &= (x-b)E \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ここで  $a+x+1 \neq 0$  とすると

$$X = \frac{x-b}{a+x+1} E$$

と変形できるが、 $X = \begin{pmatrix} 3x-1 & 2x-1 \\ -3x+2 & -2x+2 \end{pmatrix}$  より  $X$  が  $E$  の実数倍となるような実数  $x$  は存在しない。したがって  $a+x+1=0$  であり、このとき①より  $x-b=0$  であるから、求める  $a, b$  の条件は

$$\begin{aligned} \begin{cases} a+x+1=0 \\ x-b=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=-a-1 \\ x=b \end{cases} \end{aligned}$$

を満たす  $x$  が存在することであるから

$$-a-1=b \Leftrightarrow a+b+1=0$$

である。

(答)  $a+b+1=0$

(3)

$X^2 = (x+1)X + xE$  を用いると  $X^3$  は

$$\begin{aligned} X^3 &= X^2 \cdot X \\ &= \{(x+1)X - xE\} \cdot X \\ &= (x+1)X^2 - xX \\ &= (x+1)\{(x+1)X - xE\} - xX \\ &= (x^2+x+1)X - x(x+1)E \\ &= \left\{ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\} X - x(x+1)E \end{aligned}$$

と表せるから、 $X^3 = O$  は

$$\begin{aligned} X^3 &= O \\ \Leftrightarrow \left\{ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\} X - x(x+1)E &= O \\ \Leftrightarrow \left\{ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\} X &= x(x+1)E \\ \Leftrightarrow X &= \frac{x(x+1)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} E \end{aligned}$$

と変形できるが、 $X = \begin{pmatrix} 3x-1 & 2x-1 \\ -3x+2 & -2x+2 \end{pmatrix}$  より  $X$  は  $E$  の実数倍にならず、これを満たす実数  $x$  は存在しない。

(証明終)