

(1)

最初の状態は (a, b, c) であるから、1回目の操作で $m=1, 2, 3, 4, 5$ を選んだあとの状態はそれぞれ $(a, c, b), (c, b, a), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b)$ となり、いずれも $\frac{1}{5}$ の確率である。したがって $p_1 = 0$ である。

2回目の操作で (a, c, b) から (a, b, c) になるのは $m=1$ を選んだ場合である。同様にして $(c, b, a), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b)$ から (a, b, c) になるのはそれぞれ $m=2, 3, 4, 5$ を選んだ場合である。したがって

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times 5 \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

となる。

$$(a, c, b), (c, b, a), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b)$$

(答)

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{1}{5}$$

(2)

(1)より、 (a, b, c) の状態から1回操作を行って (a, b, c) に戻ることはない。また、 (a, b, c) 以外の状態すなわち $(a, c, b), (c, b, a), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b)$ から1回操作を行って

(a, b, c) になる確率はそれぞれ $\frac{1}{5}$ である。したがって $n \geq 1$ で

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \times 0 + q_n \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} q_n \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

$p_n + q_n = 1$ であるから

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{5} q_n \\ &= \frac{1}{5} (1 - p_n) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{5} \left(p_n - \frac{1}{6} \right)$$

が $n \geq 1$ で成り立つ。したがって、 $p_1 = 0$ より p_n は

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{6} &= \left(-\frac{1}{5} \right)^{n-1} \cdot \left(p_1 - \frac{1}{6} \right) \\ \Leftrightarrow p_n &= \left(-\frac{1}{5} \right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) + \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{5}{6} \left(-\frac{1}{5} \right)^n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(答) \quad p_n = \frac{5}{6} \left(-\frac{1}{5} \right)^n + \frac{1}{6} \quad (n \geq 1)$$

(1)

 $a=b=c$ のとき

$$n(a+b+c)=abc$$

$$\Leftrightarrow 3an=a^3$$

$$\Leftrightarrow 3n=a^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

と変形できるから、左辺が3の倍数であることから右辺も3の倍数である。よって a は3の倍数となるため $a=3a'$ とおくと、 $\textcircled{1}$ より

$$3n=9a'^2$$

$$\Leftrightarrow n=3a'^2$$

となる。したがって n は3の倍数である。

(証明終)

(2)

 $n=3$ のとき、 $a \leq b \leq c$ より

$$a^2c \leq abc = 3(a+b+c) \leq 9c$$

$$\Leftrightarrow a^2 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow a \leq 3$$

が成り立つ。したがって a は $a=1, 2, 3$ のいずれかである。

[1] $a=1$ のとき

$$3(1+b+c)=bc$$

$$\Leftrightarrow bc-3b-3c=3$$

$$\Leftrightarrow (b-3)(c-3)=12$$

が成り立つから $a \leq b \leq c$ より $(b, c)=(4, 15), (5, 9), (6, 7)$ である。

[2] $a=2$ のとき

$$3(2+b+c)=2bc$$

$$\Leftrightarrow 4bc-6b-6c=12$$

$$\Leftrightarrow (2b-3)(2c-3)=21$$

が成り立つから $a \leq b \leq c$ より $(b, c)=(2, 12), (3, 5)$ である。

[3] $a=3$ のとき

$$3(3+b+c)=3bc$$

$$\Leftrightarrow bc-b-c=3$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(c-1)=4$$

が成り立つから $a \leq b \leq c$ より $(b, c)=(3, 3)$ である。

以上、[1], [2], [3]より、求める自然数の組は

$$(a, b, c)=(1, 4, 15), (1, 5, 9), (1, 6, 7), (2, 2, 12), (2, 3, 5), (3, 3, 3)$$

である。

(答) $(a, b, c)=(1, 4, 15), (1, 5, 9), (1, 6, 7), (2, 2, 12), (2, 3, 5), (3, 3, 3)$

3

(1)

$$f(x) = \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ より}$$

$$f'(x) = 8 \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= 8(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = 8 \cdot 2x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (x^2+1)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= -24x(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}$$

であるから $f(x)$ の増減凹凸表は次のようになる。

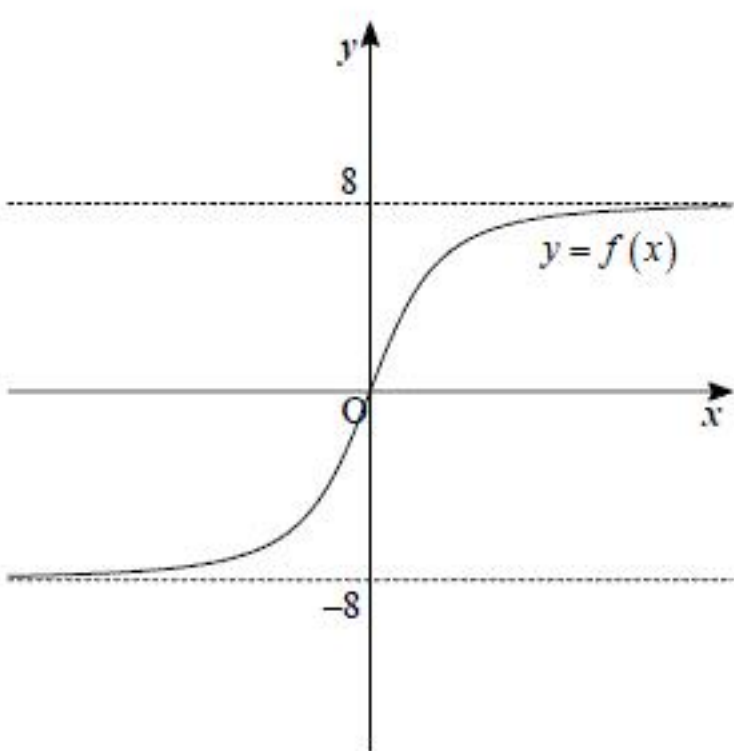
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

また,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8}{\sqrt{1+\frac{1}{(-x)^2}}} = -8$$

であるから漸近線は $y=8$, $y=-8$ である。したがって $y=f(x)$ のグラフは次図のようになる。



(答) 前図

(2)

$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x+k$ がちょうど2個の共有点をもつとき,

$$f(x) = x+k$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}} = x+k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}} - x$$

より $g(x) = x - \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}}$ とおくと, $y=g(x)$ のグラフと $y=k$ もちょうど2個の共有点をもつ。

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

$$= 8(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} - 1$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)^3 - 1$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 1 \right\}$$

$$= \left(\frac{2-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right) \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\}$$

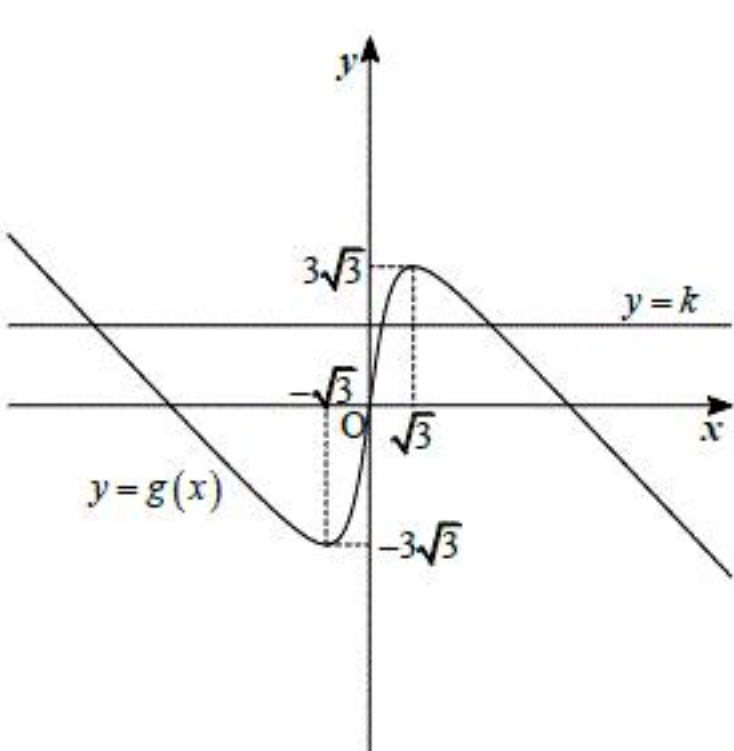
$$= \left\{ \frac{4-(x^2+1)}{(2+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} \right\} \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{-(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} \right\} \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\}$$

より $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	$-3\sqrt{3}$	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$

したがって $y=g(x)$ と $y=k$ のグラフは次図のようになる。

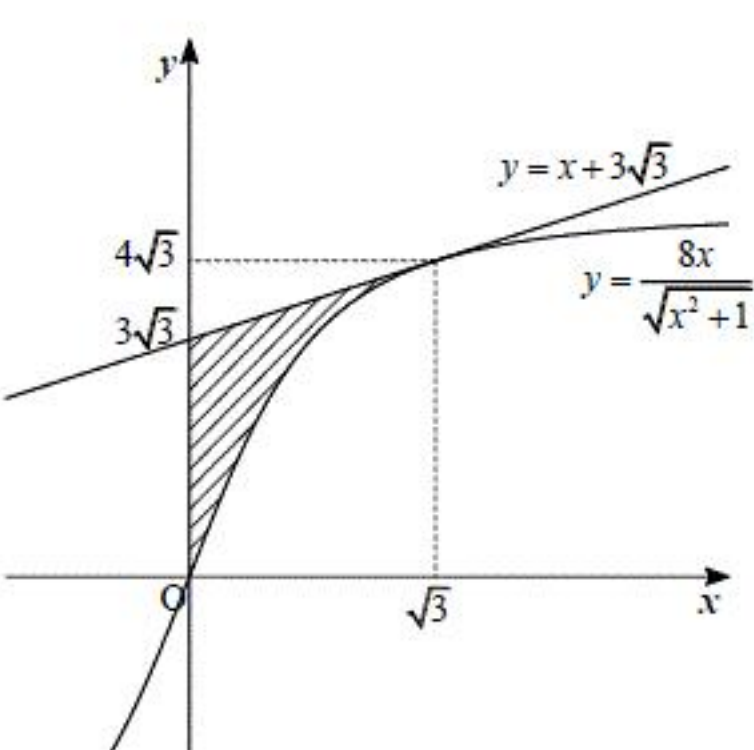


上図より共有点を2個もつのは $k=3\sqrt{3}, -3\sqrt{3}$ のときであるが, k は正の定数であることから $k=3\sqrt{3}$ である。

(答) $k=3\sqrt{3}$

(3)

$k=3\sqrt{3}$ であるから, S は次図の斜線部の面積に等しい。



したがって

$$S = \int_0^{\sqrt{3}} \left(x + 3\sqrt{3} - \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 3\sqrt{3}x - 8\sqrt{x^2+1} \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5}{2}$$

と求められる。

(答) $S = \frac{5}{2}$

(1)

$$X = \begin{pmatrix} 3x-1 & 2x-1 \\ -3x+2 & -2x+2 \end{pmatrix}$$

$$X^n = \begin{pmatrix} P_n(x) & Q_n(x) \\ R_n(x) & S_n(x) \end{pmatrix}$$

とおくとき、数学的帰納法を利用して、 $x = \frac{1}{2}$ のとき、すべての n に対して、 $Q_n(x) = 0$ である

ことを示す。

[1] $n=1$ のとき、

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ より } Q_1(x) = 0 \text{ が成り立つ。}$$

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき成り立つと仮定すると、 $Q_k(x) = 0$ より

$$X^k = \begin{pmatrix} P_k\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ R_k\left(\frac{1}{2}\right) & S_k\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= X^k \cdot X \\ &= \begin{pmatrix} P_k\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ R_k\left(\frac{1}{2}\right) & S_k\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}P_k\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}R_k\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}S_k\left(\frac{1}{2}\right) & S_k\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって $Q_{k+1}(x) = 0$ となり $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上、[1], [2] より数学的帰納法から、 $x = \frac{1}{2}$ のとき、すべての n に対して、 $Q_n(x) = 0$ であることが示された。

同様に、 $x = \frac{2}{3}$ のとき、すべての n に対して、 $R_n(x) = 0$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき、

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ より } R_1(x) = 0 \text{ が成り立つ。}$$

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき成り立つと仮定すると、 $R_k(x) = 0$ より

$$X^k = \begin{pmatrix} P_k\left(\frac{2}{3}\right) & Q_k\left(\frac{2}{3}\right) \\ 0 & S_k\left(\frac{2}{3}\right) \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= X^k \cdot X \\ &= \begin{pmatrix} P_k\left(\frac{2}{3}\right) & Q_k\left(\frac{2}{3}\right) \\ 0 & S_k\left(\frac{2}{3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_k\left(\frac{2}{3}\right) & \frac{1}{3}P_k\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}Q_k\left(\frac{2}{3}\right) \\ 0 & \frac{2}{3}S_k\left(\frac{2}{3}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって $R_{k+1}(x) = 0$ となり $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上、[1], [2] より数学的帰納法から、 $x = \frac{2}{3}$ のとき、すべての n に対して、 $R_n(x) = 0$ であることが示された。

(証明終)

(2)

ケーリー・ハミルトンの定理より

$$X^2 - (x+1)X + xE = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 = (x+1)X - xE$$

が成り立つから

$$X^2 + aX + bE = O$$

$$\Leftrightarrow (x+1)X - xE + aX + bE = O$$

$$\Leftrightarrow (a+x+1)X = (x-b)E \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで $a+x+1 \neq 0$ とすると

$$X = \frac{x-b}{a+x+1} E$$

と変形できるが、 $X = \begin{pmatrix} 3x-1 & 2x-1 \\ -3x+2 & -2x+2 \end{pmatrix}$ より X が E の実数倍となるような実数 x は存在し

ない。したがって $a+x+1=0$ であり、このとき①より $x-b=0$ であるから、求める a, b の条件は

$$\begin{cases} a+x+1=0 \\ x-b=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-a-1 \\ x=b \end{cases}$$

を満たす x が存在することであるから

$$-a-1=b \Leftrightarrow a+b+1=0$$

である。

(答) $a+b+1=0$

(3)

$X^2 = (x+1)X + xE$ を用いると X^3 は

$$X^3 = X^2 \cdot X$$

$$= \{(x+1)X - xE\} \cdot X$$

$$= (x+1)X^2 - xX$$

$$= (x+1)\{(x+1)X - xE\} - xX$$

$$= (x^2+x+1)X - x(x+1)E$$

$$= \left\{ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\} X - x(x+1)E$$

と表せるから、 $X^3 = O$ は

$$X^3 = O$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\} X - x(x+1)E = O$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\} X = x(x+1)E$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{x(x+1)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} E$$

と変形できるが、 $X = \begin{pmatrix} 3x-1 & 2x-1 \\ -3x+2 & -2x+2 \end{pmatrix}$ より X は E の実数倍にならず、これを満たす実数 x

は存在しない。

(証明終)