

平成26年度入試
個別学力試験問題（前期日程）

数 学
（数理・情報システム学科）

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は2ページ、解答用紙は4枚です。指示があってから確認し、解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. 解答用紙の裏面は使わないでください。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き、結論を明示してください。
小問に分けられているときは、小問の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後、問題紙は持ち帰ってください。

- 1 3つの箱 X, Y, Z と 3つの玉 a, b, c があり、1つの箱には1つの玉が入るとする。箱 X には a が、箱 Y には b が、箱 Z には c が入っている状態から始めて、次の操作を繰り返し行う。

「数字 $1, 2, 3, 4, 5$ の中から無作為に1つの数字 m を選ぶ。 $m = 1$ ならば、箱 Y, Z にある玉をそれぞれ箱 Z, Y に移す。 $m = 2$ ならば、箱 X, Z にある玉をそれぞれ箱 Z, X に移す。 $m = 3$ ならば、箱 X, Y にある玉をそれぞれ箱 Y, X に移す。 $m = 4$ ならば、箱 X, Y, Z にある玉をそれぞれ箱 Y, Z, X に移す。 $m = 5$ ならば、箱 X, Y, Z にある玉をそれぞれ箱 Z, X, Y に移す。」

この操作を n 回繰り返したあとに3つの玉が最初の状態に戻っている確率を p_n とする。箱 X, Y, Z にそれぞれ玉 x, y, z が入っている状態を (x, y, z) と表す。たとえば、最初の状態は (a, b, c) である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 1回目の操作を行ったあとの起こりうる状態をすべて挙げ、 p_1, p_2 を求めよ。
- (2) n 回目の操作を行ったあとの状態が最初の状態 (a, b, c) となっていない確率を q_n とする。 $n \geq 1$ のとき、 $p_{n+1} = \frac{1}{5}q_n$ が成り立つことを示せ。
- (3) p_n を求めよ。

- 2 $f(x) = \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ の凹凸と漸近線を調べて、そのグラフの概形をかけ。
- (2) k を正の定数とする。関数 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x + k$ がちょうど2個の共有点をもつとき、 k の値を求めよ。
- (3) k を(2)で求めた定数とする。このとき、 $x \geq 0$ の範囲で、関数 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x + k$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

3 $a_1 = 2$ とし, $f(x) = x^2 - 3$ とする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a_1, f(a_1))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_2 とする。以下同様に, $n = 3, 4, \dots$ に対して, 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a_{n-1}, f(a_{n-1}))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_n とする。数列 $\{a_n\}$ に対して, 次の問いに答えよ。

- (1) a_2 を求めよ。
- (2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。
- (3) $a_n \geq \sqrt{3}$ を示せ。
- (4) $a_n - \sqrt{3} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (2 - \sqrt{3})$ を示し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

4 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。 x を実数とし, 行列

$$X = \begin{pmatrix} 3x - 1 & 2x - 1 \\ -3x + 2 & -2x + 2 \end{pmatrix}$$

を定める。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n に対して X の n 乗を $X^n = \begin{pmatrix} P_n(x) & Q_n(x) \\ R_n(x) & S_n(x) \end{pmatrix}$ とおく。このとき, すべての n に対して, $x = \frac{1}{2}$ のとき, $Q_n(x) = 0$ であることを示せ。また, すべての n に対して, $x = \frac{2}{3}$ のとき, $R_n(x) = 0$ であることを示せ。
- (2) a と b は定数とする。このとき, $X^2 + aX + bE = O$ をみたす実数 x が存在するための a, b の条件を求めよ。
- (3) $X^3 = O$ をみたす実数 x は存在しないことを証明せよ。