

(1)

北, 南, 西, 東に1マス進むことを, それぞれ $\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow$ の矢印を用いて表す。

O 地点から A 地点に最短距離で行く道順の総数は, 2つの $\rightarrow$ と3つの $\uparrow$ を1列に並べる方法の総数に等しく,

$$\frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ (通り)}$$

である。同様に, A 地点から P 地点に最短距離で行く道順の総数は, 4つの $\rightarrow$ と2つの $\uparrow$ を1列に並べる方法の総数に等しく,

$$\frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ (通り)}$$

である。よって, O 地点を出発し, A 地点を通り, P 地点へ最短距離で行く道順は

$$10 \times 15 = 150 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 150 通り

(2)

(1)と同様に考えると, O 地点から B 地点に最短距離で行く道順は

$$\frac{5!}{4!1!} = 5 \text{ (通り)}$$

である。次に, C 地点を通らずに B 地点から P 地点に最短距離で行く道順について考える。C 地点も通ることができる場合, B 地点から P 地点に最短距離で行く道順は

$$\frac{6!}{2!4!} = 15 \text{ (通り)}$$

である。一方, B 地点から C 地点を経由して P 地点に最短距離で行く道順は

$$\frac{2!}{1!1!} \times 1 \times \frac{3!}{1!2!} = 6 \text{ (通り)}$$

である。よって, C 地点を通らずに B 地点から P 地点に最短距離で行く道順は

$$15 - 6 = 9 \text{ (通り)}$$

である。以上より, 求める道順は

$$5 \times 9 = 45 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 45 通り

(3)

O 地点 $\longrightarrow$ A 地点 $\longrightarrow$ B 地点 $\longrightarrow$ P 地点と最短距離で行く道順および, O 地点 $\longrightarrow$ B 地点 $\longrightarrow$ A 地点 $\longrightarrow$ P 地点と最短距離で行く道順について, いずれの距離も等しく最短である。したがって, これら2種類の経路の総数を求めればよい。(1), (2)の結果より, O 地点 $\longrightarrow$ A 地点, A 地点 $\longrightarrow$ P 地点, O 地点 $\longrightarrow$ B 地点, B 地点 $\longrightarrow$ P 地点と最短距離で行く道順は, それぞれ10通り, 15通り, 5通り, 9通りである。一方, A 地点 $\longrightarrow$ B 地点と最短で行く道順は

$$\frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ (通り)}$$

であり, B 地点 $\longrightarrow$ A 地点と最短で行く道順も同様に6通りである。以上より, O 地点 $\longrightarrow$ A 地点 $\longrightarrow$ B 地点 $\longrightarrow$ P 地点と最短距離で行く道順は

$$10 \times 6 \times 9 = 540 \text{ (通り)}$$

であり, O 地点 $\longrightarrow$ B 地点 $\longrightarrow$ A 地点 $\longrightarrow$ P 地点と最短距離で行く道順は

$$5 \times 6 \times 15 = 450 \text{ (通り)}$$

であるから, 求める道順は

$$540 + 450 = 990 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 990 通り

(1)

$2^x = t$ ($t > 0$) とおき、与式を変形すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= 4^x + a \cdot 2^{x-1} + a \\ &= t^2 + \frac{at}{2} + a \\ &= \left(t + \frac{a}{4}\right)^2 + a - \frac{a^2}{16} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$g(t) = \left(t + \frac{a}{4}\right)^2 + a - \frac{a^2}{16}$$

とおき、 $g(t)$ を t の 2 次関数と見たときの軸 $t = -\frac{a}{4}$ の正負による場合分けを行う。

$$[1] \quad -\frac{a}{4} \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 0 \text{ のとき}$$

このとき、 $t > 0$ の範囲において、関数 $g(t)$ は最小値をもたない。よって、不適である。

$$[2] \quad -\frac{a}{4} > 0 \Leftrightarrow a < 0 \text{ のとき}$$

このとき、 $t > 0$ の範囲において、関数 $g(t)$ は $t = -\frac{a}{4}$ のときに最小値 $a - \frac{a^2}{16}$ をとる。

よって、問題の条件より、

$$\begin{aligned} a - \frac{a^2}{16} &= -2 \\ \Leftrightarrow a^2 - 16a - 32 &= 0 \\ \therefore a &= 8 - 4\sqrt{6} \quad (\because a < 0) \end{aligned}$$

を得る。

以上[1], [2]より、求める a の値は $a = 8 - 4\sqrt{6}$ である。

(答) $8 - 4\sqrt{6}$

(2)

方程式 $f(x) = 0$ が実数解をもつことは、方程式 $g(t) = 0$ が正の実数解をもつことと同値である。以下、(1)と同様に、軸 $t = -\frac{a}{4}$ の正負による場合分けを行う。

$$[1] \quad -\frac{a}{4} \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 0 \text{ のとき}$$

$g(t) = 0$ が正の実数解をもつためには $g(0) < 0$ であればよい。しかし、 $g(0) = a \geq 0$ であるから、条件を満たす a は存在しない。

$$[2] \quad -\frac{a}{4} > 0 \Leftrightarrow a < 0 \text{ のとき}$$

$g(t)$ の最小値が $a - \frac{a^2}{16} < 0$ となることから、 a の値にかかわらず方程式 $g(t) = 0$ は正の実数解をもつ。

以上[1], [2]より、求める a の値の範囲は $a < 0$ である。

(答) $a < 0$

(1)

$$f'(x) = 2ax + b$$

より,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (2ax + b)^2 dx \\ &= \int_0^1 (4a^2x^2 + 4abx + b^2) dx \\ &= \left[\frac{4}{3}a^2x^3 + 2abx^2 + b^2x \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3}a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I = \frac{4}{3}a^2 + 2ab + b^2$$

(2)

(1)より, $a = \cos \theta, b = \sin \theta$ のとき,

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{3}\cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \\ &= 1 + \sin 2\theta + \frac{1}{3}\cos^2 \theta \\ &= 1 + \sin 2\theta + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ &= \sin 2\theta + \frac{1}{6}\cos 2\theta + \frac{7}{6} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I = \sin 2\theta + \frac{1}{6}\cos 2\theta + \frac{7}{6}$$

(3)

(2)の結果を三角関数の合成公式を用いて変形すると,

$$\begin{aligned} I &= \sin 2\theta + \frac{1}{6}\cos 2\theta + \frac{7}{6} \\ &= \frac{\sqrt{37}}{6}\sin(2\theta + \alpha) + \frac{7}{6} \end{aligned}$$

(ただし, α は $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{37}}, \cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{37}}$ を満たす)となる。ここで, $0 \leq \theta < \pi$ より $\alpha \leq 2\theta + \alpha < 2\pi + \alpha$ であるから,

$$-1 \leq \sin(2\theta + \alpha) \leq 1$$

である。よって, I の最大値は $\frac{7+\sqrt{37}}{6}$, 最小値は $\frac{7-\sqrt{37}}{6}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } \frac{7+\sqrt{37}}{6}, \text{ 最小値: } \frac{7-\sqrt{37}}{6}$$