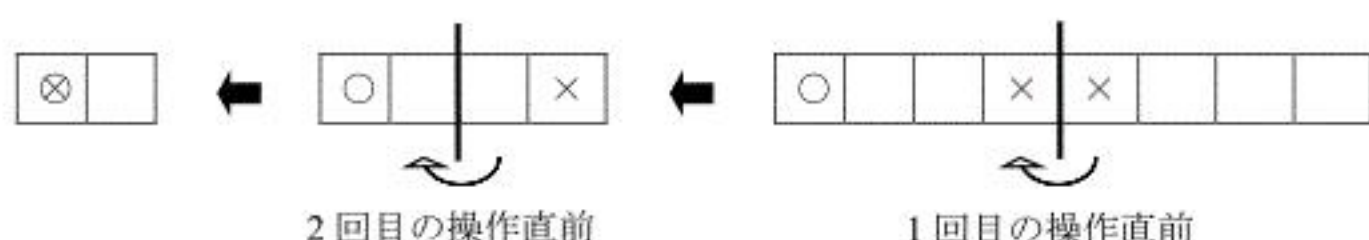


(1)

1回の操作でゲームが終了するとき、 x_1 の値に対して x_2 の値は1通りに定まる。よって、 x_1 は1から 2^n までの任意の自然数を取り、 x_2 は x_1 に対して定まる値をとればよいことから、

$$p(n, 1) = \frac{2^n}{2^n} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

である。つづいて、 $n \geq 2$ のとき、 $p(n, 2)$ を求める。 $p(n, 1)$ における検討により、2回目の操作直前の $\times$ の位置は、 $\bigcirc$ の位置に対して1通りに定まることが分かる。また、1回目の操作直前の $\times$ の位置は、下図のように $\bigcirc$ の位置に対して2通りに定まる。



よって、2回の操作でゲームが終了するとき、 x_1 の値に対して x_2 の値は2通りに定まる。以上より、

$$p(n, 2) = \frac{2^n}{2^n} \times \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p(n, 1) = \frac{1}{2^n}, \quad p(n, 2) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

(2)

(1)における検討より、 k 回($2 \leq k \leq n$)の操作でゲームが終了するとき、 k 回目の操作直前の $\times$ の位置は、 $\bigcirc$ の位置に対して1通りに定まり、 $k-1$ 回目の操作直前の $\times$ の位置は2通りに定まる。以下同様にして、 $\bigcirc$ の位置に対する $\times$ の位置を考えると、

$k-2$ 回目の操作直前の $\times$ の位置は 2^2 通り

$k-3$ 回目の操作直前の $\times$ の位置は 2^3 通り

$\vdots$

1回目の操作直前の $\times$ の位置は 2^{k-1} 通り

に定まる。よって、 k 回の操作でゲームが終了するとき、 x_1 の値に対して x_2 の値は 2^{k-1} 通りに定まるため、

$$p(n, k) = \frac{2^n}{2^n} \times \frac{2^{k-1}}{2^n} = \frac{1}{2^{n-k+1}}$$

$$p(n-1, k-1) = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} \times \frac{2^{k-2}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-k+1}}$$

となる。つまり、

$$p(n, k) = p(n-1, k-1)$$

である。

$$(\text{答}) \quad p(n, k) = p(n-1, k-1)$$

(3)

(2)より、 $2 \leq k \leq n$ のとき、

$$p(n, k) = \frac{1}{2^{n-k+1}}$$

である。一方、(1)の結果より

$$p(n, 1) = \frac{1}{2^n}$$

であるから、これは $k=1$ の場合も成り立つ。

$$(\text{答}) \quad p(n, k) = \frac{1}{2^{n-k+1}}$$

(1)

xy 平面上の原点を O として、

$$\overrightarrow{OA} = (-1, 1), \overrightarrow{OB} = (0, -1), \overrightarrow{OC} = (1, 1)$$

とする。題意より、

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = (t-1, -2t+1)$$

$$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} = (t, 2t-1)$$

となるため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-t)\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ} \\ &= \left((1-t)(t-1) + t^2, (1-t)(-2t+1) + t(2t-1) \right) \\ &= \left(2t-1, (2t-1)^2 \right)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \text{ R} \left(2t-1, (2t-1)^2 \right)$$

(2)

点 $P(t-1, -2t+1)$ および点 $Q(t, 2t-1)$ を通る直線 ℓ の方程式を求めると、

$$\begin{aligned}y &= \frac{(2t-1) - (-2t+1)}{t - (t-1)}(x - t) + (2t-1) \\ \therefore y &= 2(2t-1)x - (2t-1)^2\end{aligned}$$

となる。一方、点 $R(2t-1, (2t-1)^2)$ は曲線 $y = x^2$ 上の点であり、導関数は $y' = 2x$ であるから、

曲線 $y = x^2$ の点 R における接線の方程式は

$$\begin{aligned}y &= 2(2t-1)\{x - (2t-1)\} + (2t-1)^2 \\ \therefore y &= 2(2t-1)x - (2t-1)^2\end{aligned}$$

であり、これは先ほど求めた直線 ℓ の方程式に一致する。よって、題意は示された。

(証明終)

(3)

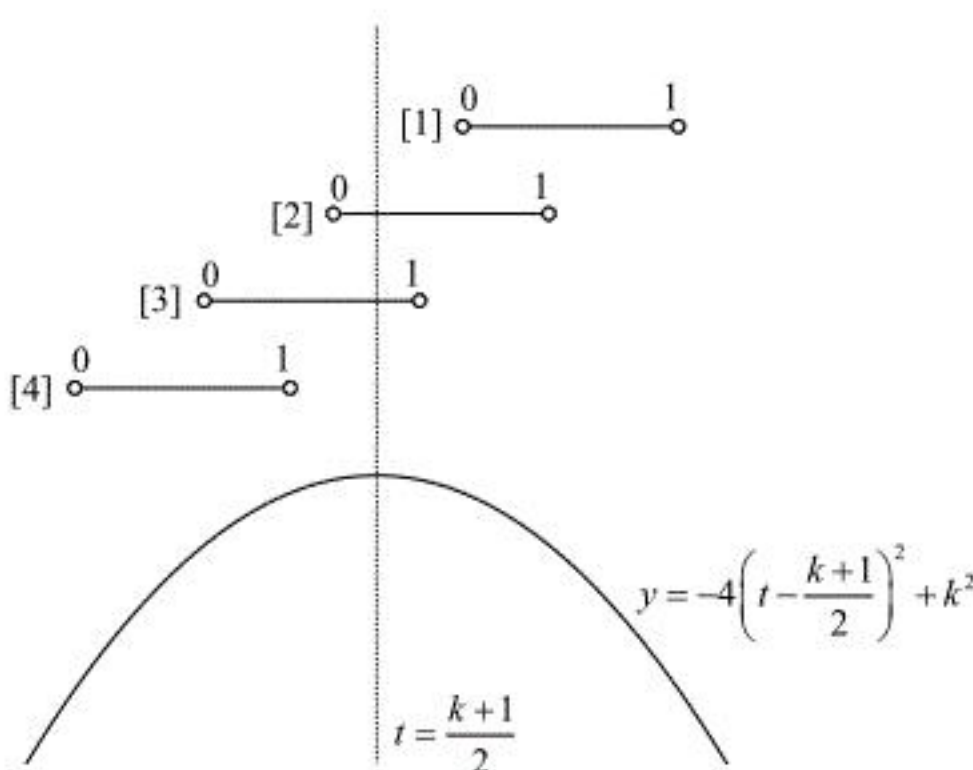
直線 ℓ の方程式について、 $x = k$ と固定し、 t が $0 < t < 1$ の範囲で動くときの y の動く範囲を考える。このとき、

$$\begin{aligned}y &= 2(2t-1)k - (2t-1)^2 \\ &= -4t^2 + 4(k+1)t - 2k - 1 \\ &= -4\left(t - \frac{k+1}{2}\right)^2 + k^2\end{aligned}$$

であるから、

$$g(t) = -4\left(t - \frac{k+1}{2}\right)^2 + k^2$$

とおき、これを t の 2 次関数とみて、軸 $t = \frac{k+1}{2}$ の値による場合分けを考える。



$$[1] \quad \frac{k+1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow k \leq -1 \quad \text{のとき}$$

y のとりうる範囲は、

$$\begin{aligned}g(1) &< y < g(0) \\ \therefore 2k-1 &< y < -2k-1\end{aligned}$$

である。

$$[2] \quad 0 < \frac{k+1}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 < k < 0 \quad \text{のとき}$$

y のとりうる範囲は、

$$\begin{aligned}g(1) &< y \leq g\left(\frac{k+1}{2}\right) \\ \therefore 2k-1 &< y < k^2\end{aligned}$$

である。

$$[3] \quad \frac{1}{2} \leq \frac{k+1}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq k < 1 \quad \text{のとき}$$

y のとりうる範囲は、

$$\begin{aligned}g(0) &< y \leq g\left(\frac{k+1}{2}\right) \\ \therefore -2k-1 &< y < k^2\end{aligned}$$

である。

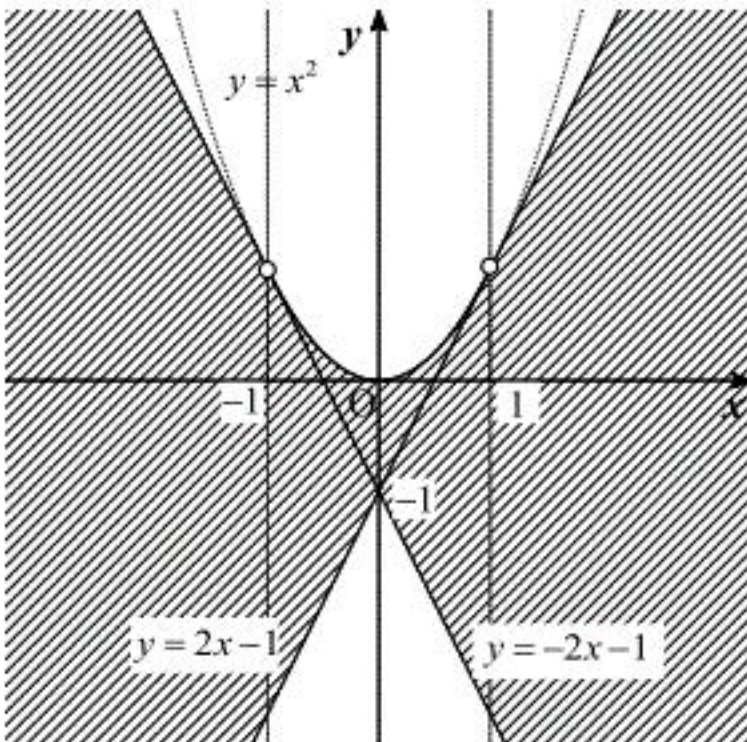
$$[4] \quad 1 \leq \frac{k+1}{2} \Leftrightarrow 1 \leq k \quad \text{のとき}$$

y のとりうる範囲は、

$$\begin{aligned}g(0) &< y \leq g(1) \\ \therefore -2k-1 &< y < 2k-1\end{aligned}$$

である。

以上[1], [2], [3], [4]について、 k を x に置き換え、 xy 平面に図示すると以下ようになる。



ただし、境界は $y = x^2$ 上の $-1 < x < 1$ の範囲 (図中実線部) のみ含む。

(答) 前図

(1)

題意より、

$$|\overline{\mathrm{OA}}|=3, |\overline{\mathrm{OB}}|=4$$

である。 $\overline{\mathrm{OA}}$ と $\overline{\mathrm{OB}}$ のなす角が $\frac{2\pi}{3}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} &= |\overline{\mathrm{OA}}| |\overline{\mathrm{OB}}| \cos \frac{2\pi}{3} \\ &= 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -6\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}|\overline{\mathrm{OA}} + 2\overline{\mathrm{OB}}|^2 &= |\overline{\mathrm{OA}}|^2 + 4\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} + 4|\overline{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= 9 - 24 + 64 \\ &= 49\end{aligned}$$

$$\therefore |\overline{\mathrm{OA}} + 2\overline{\mathrm{OB}}| = 7$$

となる。

(答) 7

(2)

$\overline{\mathrm{OA}}$ と $\overline{\mathrm{OB}}$ のなす角が 4α のとき、 $\triangle \mathrm{OAB}$ の面積 S は、

$$S = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} \cdot \sin 4\alpha = 6 \sin 4\alpha \quad \dots \textcircled{1}$$

と表される。ここで、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \alpha > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{4^2}} \\ &= \frac{\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}\sin 4\alpha &= 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \\ &= 4 \sin \alpha \cos \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{7\sqrt{15}}{32} \left(\because \sin \alpha = \frac{1}{4}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \right)\end{aligned}$$

となる。これを①に代入して、

$$S = 6 \cdot \frac{7\sqrt{15}}{32} = \frac{21\sqrt{15}}{16}$$

を得る。

(答) $\frac{21\sqrt{15}}{16}$

(3)

$$|\overline{\mathrm{OA}}|=3, |\overline{\mathrm{OB}}|=4$$

であるから、 $-\pi \leq p, q \leq \pi$ である実数 p, q を用いて、

$$\overline{\mathrm{OA}} = (3 \cos p, 3 \sin p), \overline{\mathrm{OB}} = (4 \cos q, 4 \sin q)$$

とおける。このとき、与式より、

$$\begin{aligned}4\overline{\mathrm{OA}} + 3\overline{\mathrm{OB}} - 12\overline{\mathrm{OE}} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 4(3 \cos p, 3 \sin p) + 3(4 \cos q, 4 \sin q) - 12(1, 0) &= (0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos p + \cos q - 1 = 0 \\ \sin p + \sin q = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos p = 1 - \cos q \\ \sin p = -\sin q \end{cases}\end{aligned}$$

であり、さらに三角関数の公式より、

$$\begin{aligned}\sin^2 p + \cos^2 p &= 1 \\ \Leftrightarrow (-\sin q)^2 + (1 - \cos q)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 - 2 \cos q + 1 &= 1 \quad (\because \sin^2 q + \cos^2 q = 1) \\ \therefore \cos q &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

を得る。このとき、

$$\cos p = 1 - \cos q = \frac{1}{2}$$

であるから、 $-\pi \leq p, q \leq \pi$ より、実数 p, q の組み合わせとして

$$(p, q) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$$

が考えられるが、 $p = q$ のときは $\sin p = -\sin q$ に反するため不適である。よって、

$$(p, q) = \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$$

であり、このとき

$$\overline{\mathrm{OA}} = \left(\frac{3}{2}, \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \overline{\mathrm{OB}} = (2, \mp 2\sqrt{3}) \quad (\text{複号同順})$$

となる。

(答) $\overline{\mathrm{OA}} = \left(\frac{3}{2}, \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \overline{\mathrm{OB}} = (2, \mp 2\sqrt{3})$ (複号同順)

(1)

$$f(x) = xe^x$$

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

$$f''(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$$

より、 $f(x)$ に関する増減表は以下のようになる。

x	...	-2	...	-1	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	$\searrow$	変曲点	$\searrow$	極小	$\nearrow$

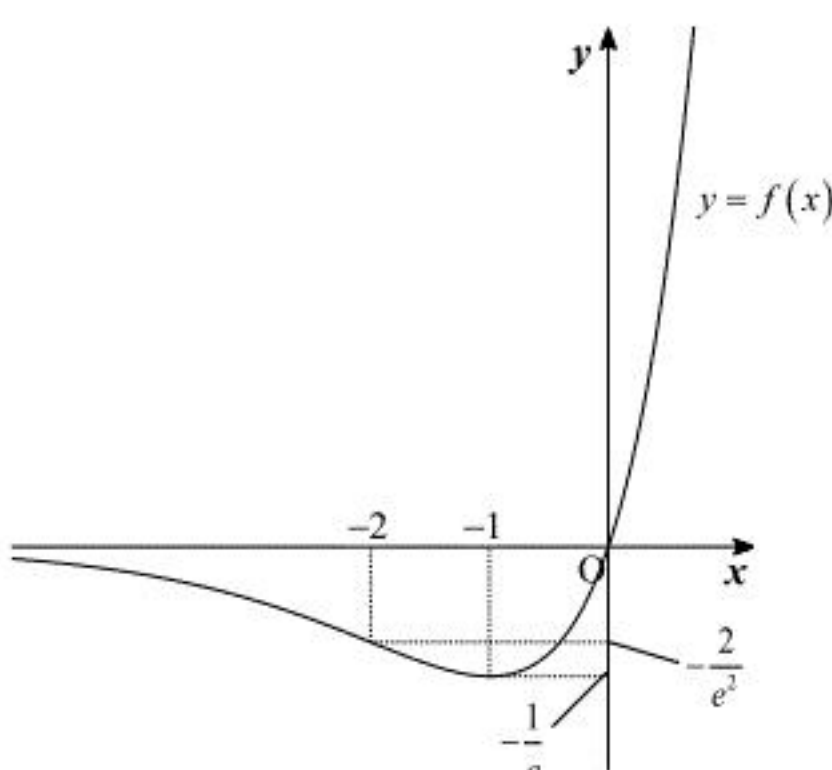
上表より、変曲点は $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$ であり、点 $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ で極小となる。また、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

であり、 $x = -t$ と置き換えることにより

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (-te^{-t}) = 0 \left(\because \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0 \right)$$

を得る。以上より、グラフの概形は以下のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)のグラフより、求める面積の和 S は、

$$S = \int_{-1}^0 -f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$$

である。ここで、部分積分法より

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= (x-1)e^x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

となることから、

$$\begin{aligned} S &= -[(x-1)e^x]_{-1}^0 + [(x-1)e^x]_0^1 \\ &= -\left(-1 + \frac{2}{e}\right) + (0+1) \\ &= 2 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

となる。

(答) $2 - \frac{2}{e}$

(3)

(1)の結果より、 $t \leq \frac{1}{2}$ のとき $f(-1) \leq f(t) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ である。ここで、 $2 < e < 3$ より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{e}{4}} \\ &< \sqrt{\frac{3}{4}} \\ &< 1 \\ f(-1) &= -\frac{1}{e} \\ &> -\frac{1}{2} \\ &> -1 \end{aligned}$$

であるから、 $t \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$-1 < f(t) < 1$$

が成り立つ。ここで、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= f(t)a_n + 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{1-f(t)} &= f(t) \cdot \left(a_n - \frac{1}{1-f(t)}\right) \quad (\because f(t) \neq 1) \end{aligned}$$

より、

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{1-f(t)}\right) \cdot \{f(t)\}^{n-1} + \frac{1}{1-f(t)}$$

であるから、 $n \rightarrow \infty$ とすると、 $-1 < f(t) < 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{1-f(t)}$$

と収束する。よって、題意は示された。

(証明終)

(1)

点 $P(x, y)$ と点 $(2, 0)$ の距離は

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

であり、点 $P(x, y)$ と直線 $x=1$ の距離は $|x-1|$ である。よって、題意の条件より

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{2}|x-1|$$

が成り立つ。上式は両辺とも正であるから、2乗して整理すると

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$$

(2)

直線 $x+y=t$ と曲線 C の交点 Q の x 座標は

$$\frac{x^2}{2} - \frac{(t-x)^2}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2tx - t^2 = 2$$

$$\therefore x = \frac{t^2 + 2}{2t} \quad (\because t \neq 0)$$

である。また、 $x+y=t$ より、交点 Q の y 座標は

$$y = \frac{t^2 - 2}{2t}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad Q\left(\frac{t^2 + 2}{2t}, \frac{t^2 - 2}{2t}\right)$$

(3)

t が $2 \leq t \leq 4$ の範囲を動くとき、 $t^2 + 2 > 0$ および $t^2 - 2 > 0$ である。よって、点 Q は常に第1象限に存在する。また、

$$x = \frac{t^2 + 2}{2t}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot 2t - (t^2 + 2) \cdot 2}{(2t)^2} = \frac{t^2 - 2}{2t^2}$$

であるから、点 Q の x 座標は t に関して単調に増加する。ここで、 $t=2, 4$ のときの点 Q の x 座

標はそれぞれ $\frac{3}{2}, \frac{9}{4}$ であるから、求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{4}} y dx \\ &= \int_2^4 y \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_2^4 \frac{t^2 - 2}{2t} \cdot \frac{t^2 - 2}{2t^2} dt \\ &= \int_2^4 \left(\frac{t}{4} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt \\ &= \left[\frac{t^2}{8} - \log t - \frac{1}{2t^2} \right]_2^4 \\ &= \frac{51}{32} - \log 2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{51}{32} - \log 2$$