

(1)

北, 南, 西, 東に1マス進むことを, それぞれ $\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow$ の矢印を用いて表す。

O 地点から A 地点に最短距離で行く道順の総数は, 2 つの $\rightarrow$ と 3 つの $\uparrow$ を 1 列に並べる方法の総数に等しく,

$$\frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ (通り)}$$

である。同様に, A 地点から P 地点に最短距離で行く道順の総数は, 4 つの $\rightarrow$ と 2 つの $\uparrow$ を 1 列に並べる方法の総数に等しく,

$$\frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ (通り)}$$

である。よって, O 地点を出発し, A 地点を通り, P 地点へ最短距離で行く道順は

$$10 \times 15 = 150 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 150 通り

(2)

(1)と同様に考えると, O 地点から B 地点に最短距離で行く道順は

$$\frac{5!}{4!1!} = 5 \text{ (通り)}$$

である。次に, C 地点を通らずに B 地点から P 地点に最短距離で行く道順について考える。C 地点も通ることができる場合, B 地点から P 地点に最短距離で行く道順は

$$\frac{6!}{2!4!} = 15 \text{ (通り)}$$

である。一方, B 地点から C 地点を経由して P 地点に最短距離で行く道順は

$$\frac{2!}{1!1!} \times 1 \times \frac{3!}{1!2!} = 6 \text{ (通り)}$$

である。よって, C 地点を通らずに B 地点から P 地点に最短距離で行く道順は

$$15 - 6 = 9 \text{ (通り)}$$

である。以上より, 求める道順は

$$5 \times 9 = 45 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 45 通り

(3)

O 地点 $\longrightarrow$ A 地点 $\longrightarrow$ B 地点 $\longrightarrow$ P 地点と最短距離で行く道順および, O 地点 $\longrightarrow$ B 地点 $\longrightarrow$ A 地点 $\longrightarrow$ P 地点と最短距離で行く道順について, いずれの距離も等しく最短である。したがって, これら 2 種類の経路の総数を求めればよい。(1), (2)の結果より, O 地点 $\longrightarrow$ A 地点, A 地点 $\longrightarrow$ P 地点, O 地点 $\longrightarrow$ B 地点, B 地点 $\longrightarrow$ P 地点と最短距離で行く道順は, それぞれ 10 通り, 15 通り, 5 通り, 9 通りである。一方, A 地点 $\longrightarrow$ B 地点と最短で行く道順は

$$\frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ (通り)}$$

であり, B 地点 $\longrightarrow$ A 地点と最短で行く道順も同様に 6 通りである。以上より, O 地点 $\longrightarrow$ A 地点 $\longrightarrow$ B 地点 $\longrightarrow$ P 地点と最短距離で行く道順は

$$10 \times 6 \times 9 = 540 \text{ (通り)}$$

であり, O 地点 $\longrightarrow$ B 地点 $\longrightarrow$ A 地点 $\longrightarrow$ P 地点と最短距離で行く道順は

$$5 \times 6 \times 15 = 450 \text{ (通り)}$$

であるから, 求める道順は

$$540 + 450 = 990 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 990 通り

(1)

$2^x = t$ ($t > 0$) とおき、与式を変形すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= 4^x + a \cdot 2^{x-1} + a \\ &= t^2 + \frac{at}{2} + a \\ &= \left(t + \frac{a}{4}\right)^2 + a - \frac{a^2}{16} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$g(t) = \left(t + \frac{a}{4}\right)^2 + a - \frac{a^2}{16}$$

とおき、 $g(t)$ を t の 2 次関数と見たときの軸 $t = -\frac{a}{4}$ の正負による場合分けを行う。

$$[1] \quad -\frac{a}{4} \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 0 \text{ のとき}$$

このとき、 $t > 0$ の範囲において、関数 $g(t)$ は最小値をもたない。よって、不適である。

$$[2] \quad -\frac{a}{4} > 0 \Leftrightarrow a < 0 \text{ のとき}$$

このとき、 $t > 0$ の範囲において、関数 $g(t)$ は $t = -\frac{a}{4}$ のときに最小値 $a - \frac{a^2}{16}$ をとる。

よって、問題の条件より、

$$\begin{aligned} a - \frac{a^2}{16} &= -2 \\ \Leftrightarrow a^2 - 16a - 32 &= 0 \\ \therefore a &= 8 - 4\sqrt{6} \quad (\because a < 0) \end{aligned}$$

を得る。

以上[1], [2]より、求める a の値は $a = 8 - 4\sqrt{6}$ である。

(答) $8 - 4\sqrt{6}$

(2)

方程式 $f(x) = 0$ が実数解をもつことは、方程式 $g(t) = 0$ が正の実数解をもつことと同値である。以下、(1)と同様に、軸 $t = -\frac{a}{4}$ の正負による場合分けを行う。

$$[1] \quad -\frac{a}{4} \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 0 \text{ のとき}$$

$g(t) = 0$ が正の実数解をもつためには $g(0) < 0$ であればよい。しかし、 $g(0) = a \geq 0$ であるから、条件を満たす a は存在しない。

$$[2] \quad -\frac{a}{4} > 0 \Leftrightarrow a < 0 \text{ のとき}$$

$g(t)$ の最小値が $a - \frac{a^2}{16} < 0$ となることから、 a の値にかかわらず方程式 $g(t) = 0$ は正の実数解をもつ。

以上[1], [2]より、求める a の値の範囲は $a < 0$ である。

(答) $a < 0$

(1)

$$f(x) = e^x - (1+x)$$

とおく。 $f(x)$ を x で微分すると、

$$f'(x) = e^x - 1$$

となり、 $x > 0$ において常に $f'(x) > 0$ が成り立つことから、 $f(x)$ は $x > 0$ で単調増加である。

ここで、 $f(0) = 0$ であるから、 $x > 0$ で常に $f(x) > 0$ が成り立つ。以上より、 $x > 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow e^x - (1+x) &> 0 \\ \therefore 1+x &< e^x \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(2)

$n \rightarrow \infty$ の場合を考えるので、 $n > 0$ としてよい。(1)の結果に $x = n^2 (> 0)$ を代入すると、

$1 + n^2 > 0$ から、

$$\begin{aligned} 0 &< 1 + n^2 < e^{n^2} \\ \Leftrightarrow 0 &< e^{-n^2} < \frac{1}{1 + n^2} \end{aligned}$$

となり、この不等式の各辺に $n > 0$ をかけると

$$0 < ne^{-n^2} < \frac{n}{1 + n^2}$$

を得る。ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + 1} = 0$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ne^{-n^2} = 0$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} ne^{-n^2} = 0$$

(3)

$$g(x) = xe^{-x^2}$$

とおく。関数 $g(x)$ を x で微分すると、

$$g'(x) = e^{-x^2} + xe^{-x^2} \cdot (-2x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$$

となる。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n (2x^2 - 1)e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n -g'(x) dx$$

である。ここで、 $g'(-x) = g'(x)$ であるから、 $g'(x)$ は偶関数である。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n (2x^2 - 1)e^{-x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n -g'(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^n -g'(x) dx \\ &= -2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} [g(x)]_0^n \\ &= -2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} ne^{-n^2} \\ &= 0 \quad (\because (2)) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n (2x^2 - 1)e^{-x^2} dx = 0$$