

(1)

5枚のカードのうち偶数のカードが2枚、奇数のカードが3枚ある。5枚から1枚取り出して、そのカードが偶数である確率は $\frac{2}{5}$ であり、奇数である確率は $\frac{3}{5}$ である。したがって、

$$p_1 = \frac{2}{5}$$

である。また、2回取り出したカードの和が偶数となるのは、1回目と2回目のカードがともに偶数またはともに奇数のときであるから、

$$p_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{13}{25}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad p_1 = \frac{2}{5}, p_2 = \frac{13}{25}$$

(2)

$\sum_{k=1}^{n+1} a_k$ が偶数となるのは、 $\sum_{k=1}^n a_k$ が偶数で、 a_{n+1} が偶数のときと、 $\sum_{k=1}^n a_k$ が奇数で、 a_{n+1} が奇数のときである。 $\sum_{k=1}^n a_k$ が偶数、奇数である確率はそれぞれ $p_n, (1-p_n)$ と表せるから、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{2}{5} p_n + \frac{3}{5} (1-p_n) \\ &= -\frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = -\frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}$$

(3)

(2)の結果より、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= -\frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{5} \left(p_n - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。これより、数列 $\left\{ p_n - \frac{1}{2} \right\}$ は公比 $-\frac{1}{5}$ 、初項 $-\frac{1}{10}$ の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{10} \left(-\frac{1}{5} \right)^{n-1} \\ \therefore p_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} \right)^n \end{aligned}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} \right)^n$$

(1)

与えられた条件より,

$$\overrightarrow{OA} = (2\sqrt{3}, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{OB} = (\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, -1)$$

となる。この絶対値をとると,

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 0^2 + 2^2} = 4$$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 + 1^2} = 4$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 4$$

が得られる。したがって、 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{AB}|$ より 3 辺の長さが等しいから、 $\triangle OAB$ は正三角形である。

(証明終)

(2)

点 $C(x, y, z)$ とすると四面体 $OABC$ は正四面体であるから,

$$|\overrightarrow{OC}| = 4, \angle AOC = 60^\circ, \angle BOC = 60^\circ$$

となる。これより,

$$|\overrightarrow{OC}| = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 16 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}| \cos \angle AOC$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}x + 2z = 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x + z = 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}| \cos \angle BOC$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}y + z = 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}y + z = 8 \quad \dots \textcircled{3}$$

が得られる。③から②の辺々を引くと,

$$2\sqrt{3}y = 4$$

$$\therefore y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

となる。また、②より,

$$z = -\sqrt{3}x + 4$$

であるから、これらを①に代入して

$$x^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-\sqrt{3}x + 4)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6\sqrt{3}x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3\sqrt{3} \pm 2\sqrt{6}}{3}$$

となる。以上より,

$$C\left(\frac{3\sqrt{3} \pm 2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 \mp 2\sqrt{2}\right) \text{ (複合同順)}$$

とわかる。

$$\text{(答)} \quad C\left(\frac{3\sqrt{3} \pm 2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 \mp 2\sqrt{2}\right) \text{ (複合同順)}$$

(1)

$y = f(x)$, $y = g(x)$ を連立すると,

$$\begin{aligned} p^2(x-\alpha)^2 &= q^2(x-\beta)^2 \\ \Leftrightarrow \{p(x-\alpha)\}^2 - \{q(x-\beta)\}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{p(x-\alpha) + q(x-\beta)\} \{p(x-\alpha) - q(x-\beta)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(p+q)x - (p\alpha + q\beta)\} \{(p-q)x - (p\alpha - q\beta)\} &= 0 \end{aligned}$$

となる。交点の x 座標は, $p = q$ のとき,

$$x = \frac{p\alpha + q\beta}{p+q}$$

となり, $p \neq q$ のとき,

$$x = \frac{p\alpha + q\beta}{p+q}, \frac{p\alpha - q\beta}{p-q}$$

となる。ここで, $p > 0, q > 0$ より $x = \frac{p\alpha + q\beta}{p+q}$ は, $x = \alpha, x = \beta$ を $q:p$ に内分する点である。

また, $x = \frac{p\alpha - q\beta}{p-q}$ は, $x = \alpha, x = \beta$ を $q:p$ に外分する点である。したがって, 交点の x 座標で,

α と β の間にあるものは

$$x = \frac{p\alpha + q\beta}{p+q}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{p\alpha + q\beta}{p+q}$$

(2)

$\frac{p\alpha + q\beta}{p+q} = \gamma$ とする。求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} g(x) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\gamma} p^2(x-\alpha)^2 dx + \int_{\gamma}^{\beta} q^2(x-\beta)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} p^2(x-\alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\gamma} + \left[\frac{1}{3} q^2(x-\beta)^3 \right]_{\gamma}^{\beta} \\ &= \frac{1}{3} p^2(\gamma-\alpha)^3 - \frac{1}{3} q^2(\gamma-\beta)^3 \\ &= \frac{1}{3} p^2 \left(\frac{-q\alpha + q\beta}{p+q} \right)^3 - \frac{1}{3} q^2 \left(\frac{p\alpha - p\beta}{p+q} \right)^3 \\ &= \frac{p^2 q^2 (p+q)(\beta-\alpha)^3}{3(p+q)^3} \\ &= \frac{p^2 q^2 (\beta-\alpha)^3}{3(p+q)^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{p^2 q^2 (\beta-\alpha)^3}{3(p+q)^2}$$

(3)

$pq = 1$ を(2)の結果に代入して,

$$S = \frac{(\beta-\alpha)^3}{3(p+q)^2}$$

となる。 S が最大になるのは, $(p+q)^2$ が最小になるときであり, $p > 0, q > 0$ より $p+q$ が最小になるときである。 $p > 0, q > 0$ より, 相加相乗平均を用いると,

$$p+q \geq 2\sqrt{pq} = 2$$

となる。等号成立条件は $p = q$ であるから,

$$p = q = 1$$

のとき, S は最大となる。

$$(\text{答}) \quad p = q = 1$$