

(1)

5枚のカードのうち偶数のカードが2枚、奇数のカードが3枚ある。5枚から1枚取り出して、そのカードが偶数である確率は $\frac{2}{5}$ であり、奇数である確率は $\frac{3}{5}$ である。したがって、

$$p_1 = \frac{2}{5}$$

である。また、2回取り出したカードの和が偶数となるのは、1回目と2回目のカードがともに偶数またはともに奇数のときであるから、

$$p_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{13}{25}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad p_1 = \frac{2}{5}, p_2 = \frac{13}{25}$$

(2)

$\sum_{k=1}^{n+1} a_k$ が偶数となるのは、 $\sum_{k=1}^n a_k$ が偶数で、 a_{n+1} が偶数のときと、 $\sum_{k=1}^n a_k$ が奇数で、 a_{n+1} が奇数のときである。 $\sum_{k=1}^n a_k$ が偶数、奇数である確率はそれぞれ $p_n, (1-p_n)$ と表せるから、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{2}{5} p_n + \frac{3}{5} (1-p_n) \\ &= -\frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = -\frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}$$

(3)

(2)の結果より、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= -\frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{5} \left(p_n - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。これより、数列 $\left\{ p_n - \frac{1}{2} \right\}$ は公比 $-\frac{1}{5}$ 、初項 $-\frac{1}{10}$ の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{10} \left(-\frac{1}{5} \right)^{n-1} \\ \therefore p_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} \right)^n \end{aligned}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} \right)^n$$

2

(1)

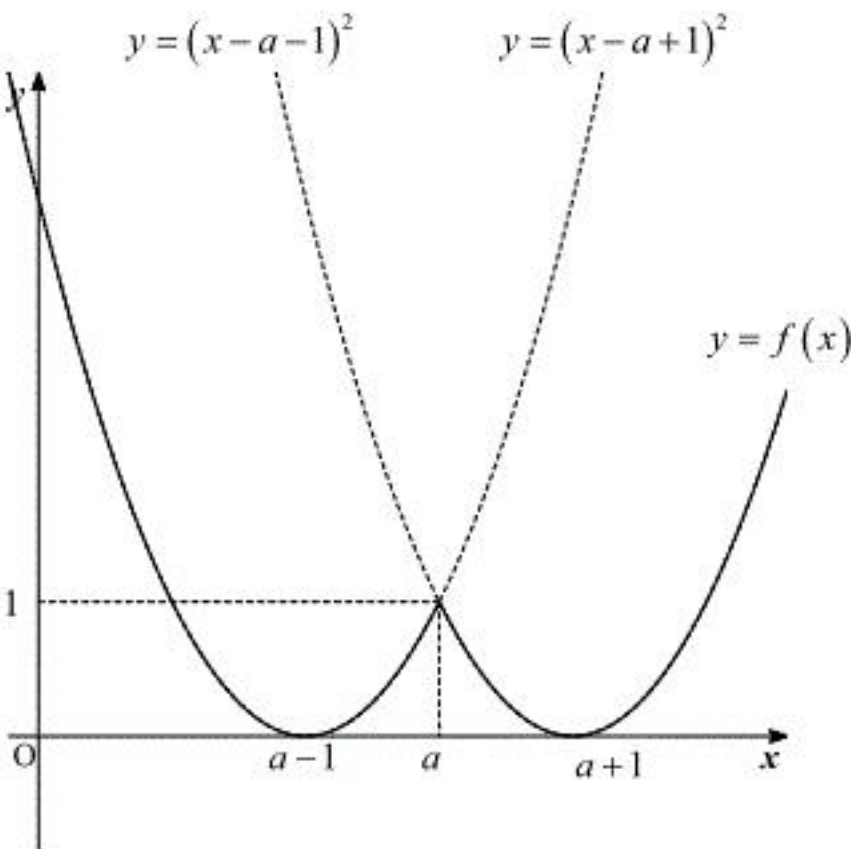
$x \geq a$ のとき

$$f(x) = (x - a - 1)^2$$

であり、 $x < a$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \{-(x - a) - 1\}^2 \\ &= (x - a + 1)^2 \end{aligned}$$

であるから、 $y = f(x)$ のグラフの概形は以下のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)より、 $f(x)$ の最大値が4となるのは、 $f(a) = 1$ であるから、 $x = 0$ または $x = 4$ のときである。また、 $y = f(x)$ は $x = a$ に関して対称であるから、 a の値で場合分けをして考える。

[1] $a \geq 2$ のとき

$f(x)$ が最大となるのは $x = 0$ のときであるから、

$$\begin{aligned} f(0) &= 4 \\ \Leftrightarrow (0 - a + 1)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow a - 1 &= \pm 2 \\ \therefore a &= 3, -1 \end{aligned}$$

となる。条件より、

$$a \geq 2$$

であるから $a = 3$ となる。

[2] $a < 2$ のとき

$f(x)$ が最大となるのは $x = 4$ のときであるから、

$$\begin{aligned} f(4) &= 4 \\ \Leftrightarrow (4 - a - 1)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow a - 3 &= \pm 2 \\ \therefore a &= 5, 1 \end{aligned}$$

となる。条件より、

$$a < 2$$

であるから $a = 1$ となる。

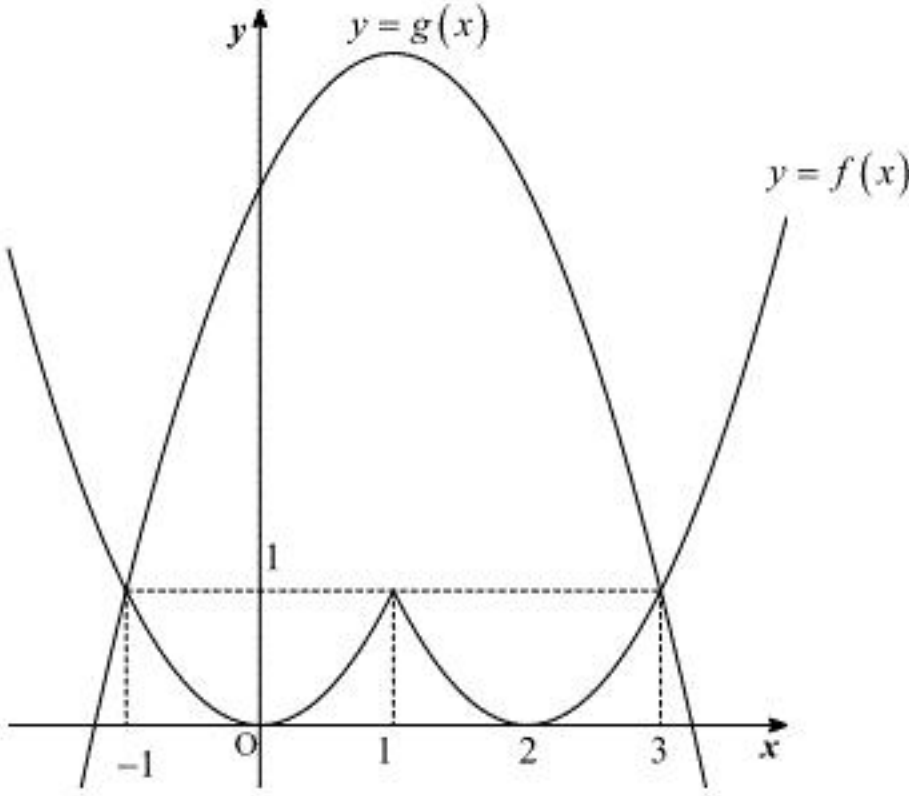
以上[1], [2]より、

$$a = 1, 3$$

である。

(答) $a = 1, 3$

(3)



不等式 $f(x) \leq g(x)$ の解が $-1 \leq x \leq 3$ となるのは、グラフが上のようになるときである。グラフより、 $y = g(x)$ は点 $(-1, 1)$, $(3, 1)$ を通るから、

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 = -1 - b + c \\ 1 = -9 + 3b + c \end{cases} \\ \therefore b = 2, c = 4 \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $b = 2, c = 4$

(1)

真数の条件より、 $x > 0$ である。 $f(x)$ を x で微分して、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{1 - \log x}{x^2} \end{aligned}$$

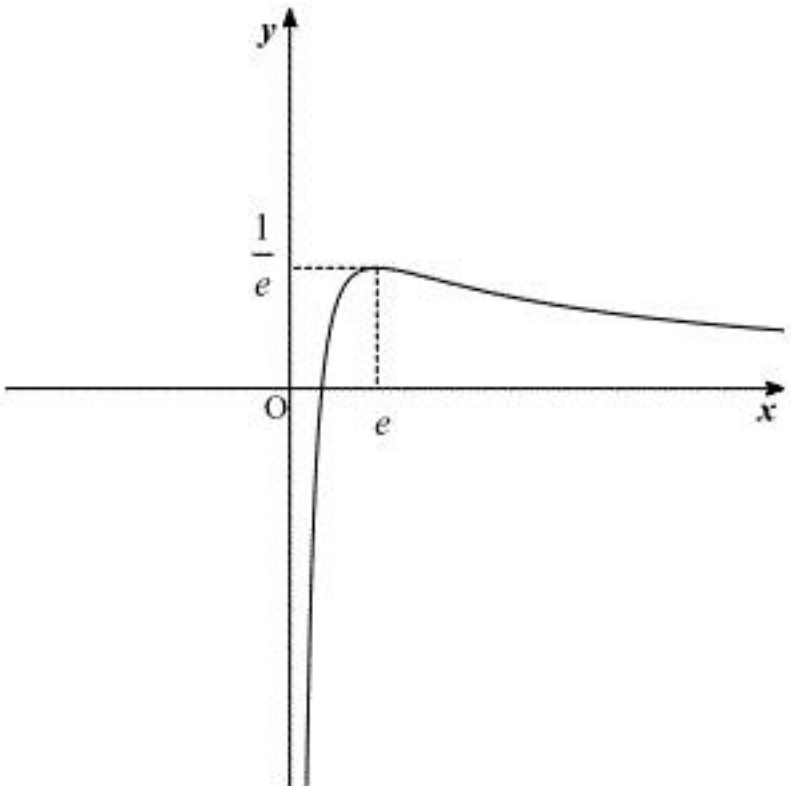
となる。また、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{x} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= 0 \end{aligned}$$

である。以上より増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

したがって、 $x = e$ のとき極大値 $f(e) = \frac{1}{e}$ をとり、グラフの概形は以下のようになる。



(答) 前図

(2)

増減表より、 $f(x)$ は $e < x$ で単調減少関数である。 $e < \pi$ より、

$$\begin{aligned} f(\pi) &< f(e) \\ \Leftrightarrow \frac{\log \pi}{\pi} &< \frac{\log e}{e} \\ \Leftrightarrow e \log \pi &< \pi \log e \\ \Leftrightarrow \log \pi^e &< \log e^\pi \end{aligned}$$

である。 $y = \log x$ は単調増加関数であるから

$$e^\pi > \pi^e$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

増減表より、 $f(x)$ は $0 < x < e$ で単調増加関数である。 $e < \pi < 4$ より $\sqrt{e} < \sqrt{\pi} < 2 < e$ であるから、

$$\begin{aligned} f(\sqrt{e}) &< f(\sqrt{\pi}) \\ \Leftrightarrow \frac{\log \sqrt{e}}{\sqrt{e}} &< \frac{\log \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\pi} \log e^{\frac{1}{2}} &< \sqrt{e} \log \pi^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log e^{\sqrt{\pi}} &< \frac{1}{2} \log \pi^{\sqrt{e}} \\ \Leftrightarrow \log e^{\sqrt{\pi}} &< \log \pi^{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

となる。 $y = \log x$ は単調増加関数であるから、

$$e^{\sqrt{\pi}} < \pi^{\sqrt{e}}$$

が成り立つ。

(証明終)