

(1)

 l を自然数として、

$$\sqrt{n^2+7}=l$$

とおく。この両辺は正であるから、

$$\sqrt{n^2+7}=l$$

$$\Leftrightarrow n^2+7=l^2$$

$$\Leftrightarrow l^2-n^2=7$$

$$\Leftrightarrow (l+n)(l-n)=7$$

となる。ここで、7は素数であるから、7の約数は $\pm 1, \pm 7$ である。また、 l, n は自然数であるから、 $l+n, l-n$ は整数で、 $l-n < l+n, 0 < l+n$ である。以上より、

$$\begin{cases} l+n=7 \\ l-n=1 \end{cases}$$

$$\therefore l=4, n=3$$

とわかる。よって、 $n=3$ である。(答) $n=3$

(2)

 m を自然数として、

$$\sqrt{n^2+7^2}=m$$

とおく。この両辺は正であるから、

$$\sqrt{n^2+7^2}=m$$

$$\Leftrightarrow n^2+7^2=m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2-n^2=7^2$$

$$\Leftrightarrow (m+n)(m-n)=7^2$$

となる。ここで、 7^2 の約数は $\pm 1, \pm 7, \pm 49$ である。また、 l, n は自然数であるから、 $m+n, m-n$ は整数で、 $m-n < m+n, 0 < m+n$ より、

$$\begin{cases} m+n=49 \\ m-n=1 \end{cases}$$

$$\therefore m=25, n=24$$

とわかる。よって、 $n=24$ である。(答) $n=24$

(3)

 M を自然数として、

$$\sqrt{n^2+7^k}=M$$

とおく。この両辺は正であるから、

$$\sqrt{n^2+7^k}=M$$

$$\Leftrightarrow n^2+7^k=M^2$$

$$\Leftrightarrow M^2-n^2=7^k$$

$$\Leftrightarrow (M+n)(M-n)=7^k$$

となる。ここで、 7^k の約数は $\pm 7^i$ ($i=0, 1, \dots, k$)である。また、 M, n は自然数であるから、 $M+n, M-n$ は整数で、 $M-n < M+n, 0 < M+n$ より、

$$\begin{cases} M+n=7^{k-r} \\ M-n=7^r \end{cases}$$

となる。ここで r は $0 \leq r < \frac{k}{2}$ を満たす整数である。これより、

$$(n, M) = \left(\frac{7^{k-r}-7^r}{2}, \frac{7^{k-r}+7^r}{2} \right)$$

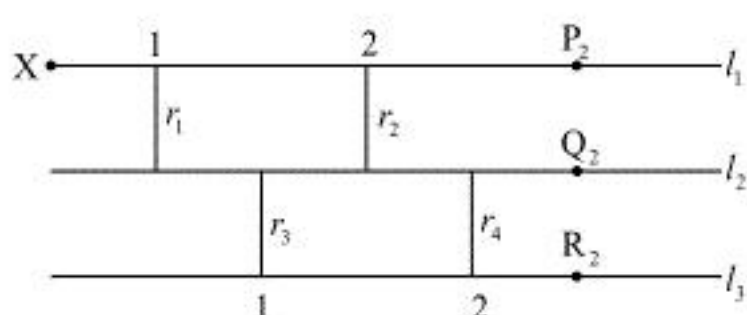
とわかる。よって、

$$n = \frac{7^{k-r}-7^r}{2} \quad (\text{ただし, } r \text{ は } 0 \leq r < \frac{k}{2} \text{ を満たす整数})$$

である。

(答) $n = \frac{7^{k-r}-7^r}{2}$ (ただし, r は $0 \leq r < \frac{k}{2}$ を満たす整数)

(1)



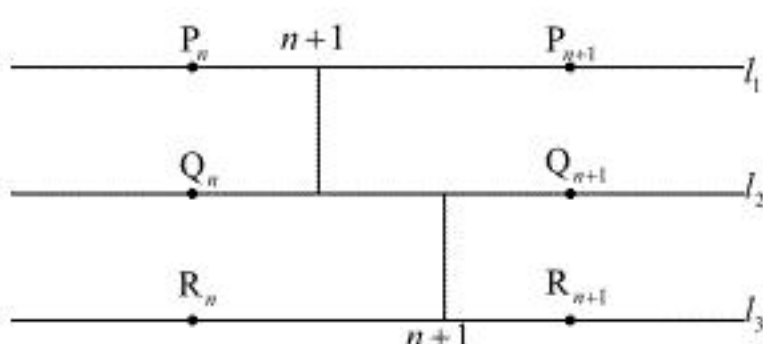
上図のように縦の道をそれぞれ r_1, r_2, r_3, r_4 とする。 X から出発して P_2 に到達する経路は、縦の道を1つも通らずに進むか、 r_1 と r_2 を通るかのいずれかである。また、 Q_2 に到達する経路は、 r_1 のみを通るか、 r_2 のみを通るか、 r_1 と r_3 と r_4 を通るかのいずれかである。したがって、

$$a_2 = 2, b_2 = 3$$

である。

(答) $a_2 = 2, b_2 = 3$

(2)



P_{n+1} に到達するのは、 P_n, Q_n からそれぞれ1通りである。 P_n, Q_n に到達する経路の個数はそれぞれ a_n, b_n 通りであるから、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \cdot 1 + b_n \cdot 1 \\ &= a_n + b_n \end{aligned}$$

である。

(答) $a_{n+1} = a_n + b_n$

(3)

数学的帰納法を利用して、 $b_n = c_n$ が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$b_1 = 1, c_1 = 1$$

より、 $b_1 = c_1$ が成り立つ。

[2] $n=k$ のときの成立を仮定したとき

(2)と同様にして、 Q_{k+1} に到達するのは、 P_k, Q_k, R_k からそれぞれ1通りである。また、 R_{k+1} に到達するのは、 P_k, Q_k, R_k からそれぞれ1通りである。したがって、

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a_k + b_k + c_k \\ c_{k+1} &= a_k + b_k + c_k \end{aligned}$$

と表せるから、 $b_{k+1} = c_{k+1}$ である。

以上[1], [2]より、 $b_n = c_n$ が成り立つ。

(証明終)

(4)

(2), (3)の結果より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n + c_n = a_n + 2b_n \end{aligned}$$

となる。ここで、 n の偶奇で場合分けをする。

[1] n が偶数のとき

$$n = 2m \quad (m \text{ は自然数}) \text{ とおくと、}$$

$$f_n = b_m, f_{n+1} = a_{m+1}, f_{n+2} = b_{m+1}$$

であるから、

$$\begin{aligned} b_{m+1} &= a_m + 2b_m \\ &= (a_m + b_m) + b_m \\ &= a_{m+1} + b_m \\ \therefore f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n \end{aligned}$$

が成り立つ。

[2] n が奇数のとき

$$n = 2m - 1 \quad (m \text{ は自然数}) \text{ とおくと、}$$

$$f_n = a_m, f_{n+1} = b_m, f_{n+2} = a_{m+1}$$

であるから、

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= a_m + b_m \\ \therefore f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n \end{aligned}$$

が成り立つ。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n において $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ が成り立つ。これと $a_1 = b_1 = 1$ より $f_1 = a_1 = 1, f_2 = b_1 = 1$ であることから、数列 $\{f_n\}$ は順に

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

である。これより、 $a_7 = f_{13}$ であるから、

$$a_7 = 233$$

である。

(答) $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, a_7 = 233$

(1)

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -5 \\ \alpha\beta = 2 \end{cases}$$

である。これを用いると、

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-5)^2 - 2 \cdot 2 \\ &= 21 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\alpha^2 + \beta^2 = 21$

(2)

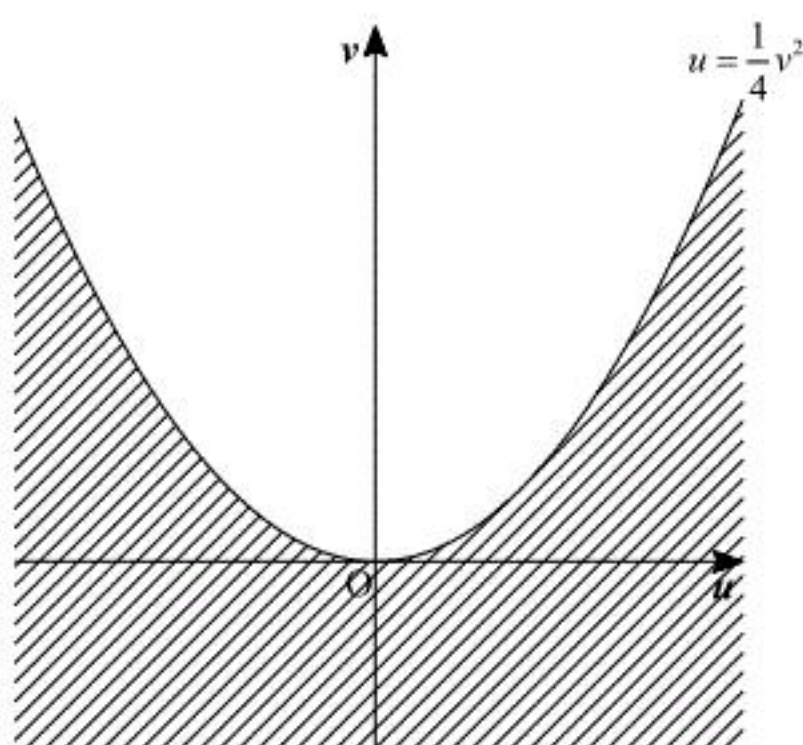
2次方程式 $t^2 + ut + v = 0$ が実数解をもつとき、その判別式 D が0以上になるから、

$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 4v \geq 0$$

$$\Leftrightarrow v \leq \frac{1}{4}u^2$$

となる。したがって、点 (u, v) の存在領域は下図斜線部である。ただし、境界線を含む。



(答) 前図斜線部 (ただし境界を含む)

(3)

$a+b=u, ab=v$ とおくと、点 (a, b) は原点を中心とする半径1の円の内部を動くから、

$$a^2 + b^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 - 2ab < 1$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 2v < 1$$

$$\Leftrightarrow v > \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}$$

となる。また、 $a+b=u, ab=v$ より、 a, b は2次方程式 $t^2 - ut + v = 0$ の実数解であるから、(2)より、

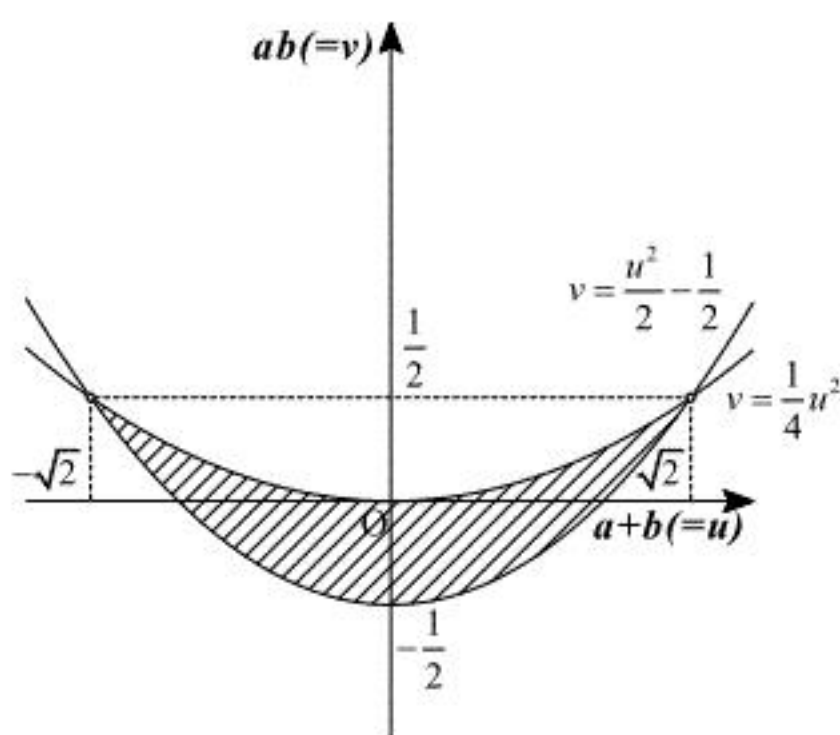
$$v \leq \frac{1}{4}u^2$$

が成り立つ。以上より、 u, v が満たす関係式は

$$\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2} < v \leq \frac{1}{4}u^2$$

であるから、求める領域は下図斜線部である。ただし、境界は $v = \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}$ 上の点および

$\left(\pm\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$ を含まず、他は含む。



(答) 前図斜線部 (ただし、境界は $v = \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}$ 上の点および $\left(\pm\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$ を含まず、他は含む)

(1)

$-1+\sqrt{3}i$ を変形して,

$$-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

となる。ここで、偏角 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ は $0\leq\theta<2\pi$ を満たす。

$$(\text{答})\ 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

(2)

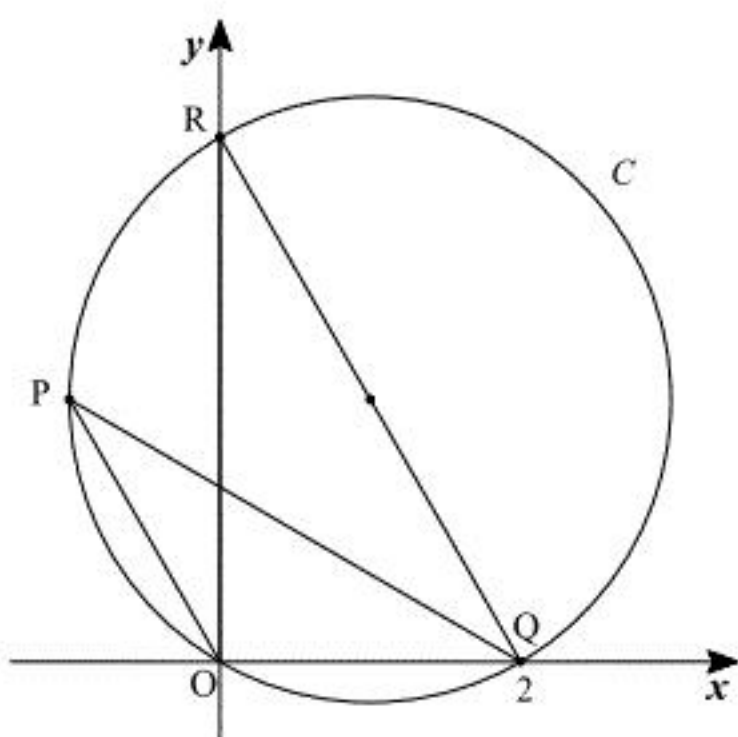
$OP=OQ=2$ であるから、 $\triangle OPQ$ は二等辺三角形である。(1)より $\angle POQ=\frac{2}{3}\pi$ であるから、

$$\begin{aligned}\angle OPQ &= \frac{1}{2}(\pi - \angle POQ) \\ &= \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答})\ \angle OPQ = \frac{\pi}{6}$$

(3)



同一の弧に対する円周角は等しいから、

$$\angle ORQ = \angle OPQ = \frac{\pi}{6}$$

である。また、 $\angle RQO = \frac{\pi}{2}$ であるから、 $\triangle ORQ$ は辺の比が $1:\sqrt{3}:2$ の直角三角形である。よって、

$$OR = \sqrt{3}OQ = 2\sqrt{3}$$

となるから、 R を表す複素数は $2\sqrt{3}i$ である。

$$(\text{答})\ 2\sqrt{3}i$$

(4)

$\angle ROQ = \frac{\pi}{2}$ であるから、 RQ は円 C の直径である。したがって、円 C の中心は線分 RQ の中点であり、

$$c = \frac{2\sqrt{3}i + 2}{2} = 1 + \sqrt{3}i$$

である。与式より、

$$\begin{aligned}w &= \frac{z-1}{z-c} \\ \Leftrightarrow w(z-c) &= z-1 \\ \Leftrightarrow (w-1)z &= cw-1\end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $w=1$ とすると

$$c=1$$

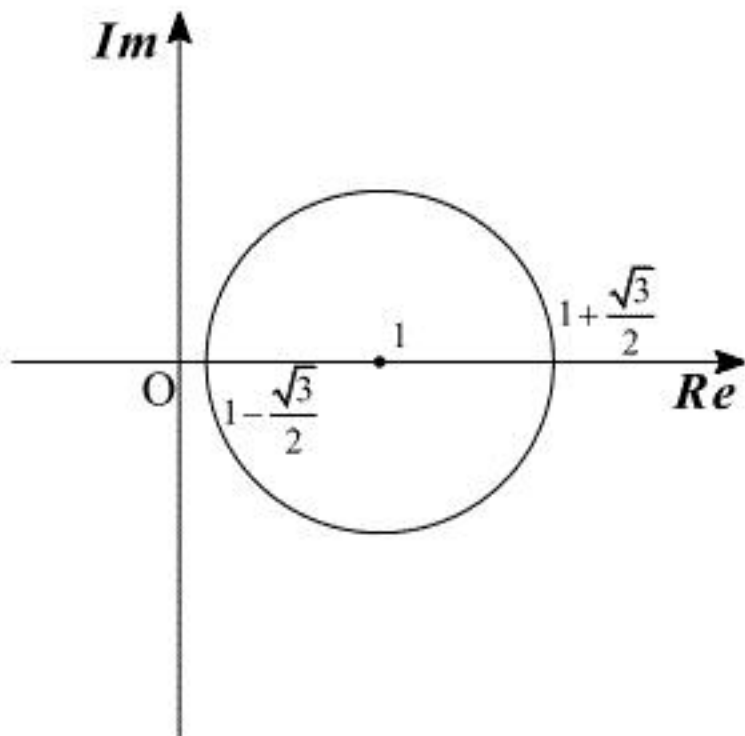
となり矛盾するから、 $w \neq 1$ である。よって、

$$z = \frac{cw-1}{w-1}$$

と表せる。一方、 z の軌跡は $|z-c|=2$ と表せるから、

$$\begin{aligned}\left|\frac{cw-1}{w-1}-c\right| &= 2 \\ \Leftrightarrow \left|\frac{c-1}{w-1}\right| &= 2 \\ \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{3}i}{w-1}\right| &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{|w-1|} &= 2 \\ \Leftrightarrow |w-1| &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

が得られる。したがって、 w がえがく図形は中心 1 、半径 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の円である。



(答) 前図

5

(1)

$\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ と $y = x$ の交点の x 座標は,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{x^2}{\sin^2 \alpha} &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \Leftrightarrow x^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) &= \sin^2 \alpha \\ \Leftrightarrow x^2 &= \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$x \geq 0, \sin \alpha > 0 \left(\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

より,

$$x = \sin \alpha$$

であるから、交点の座標は,

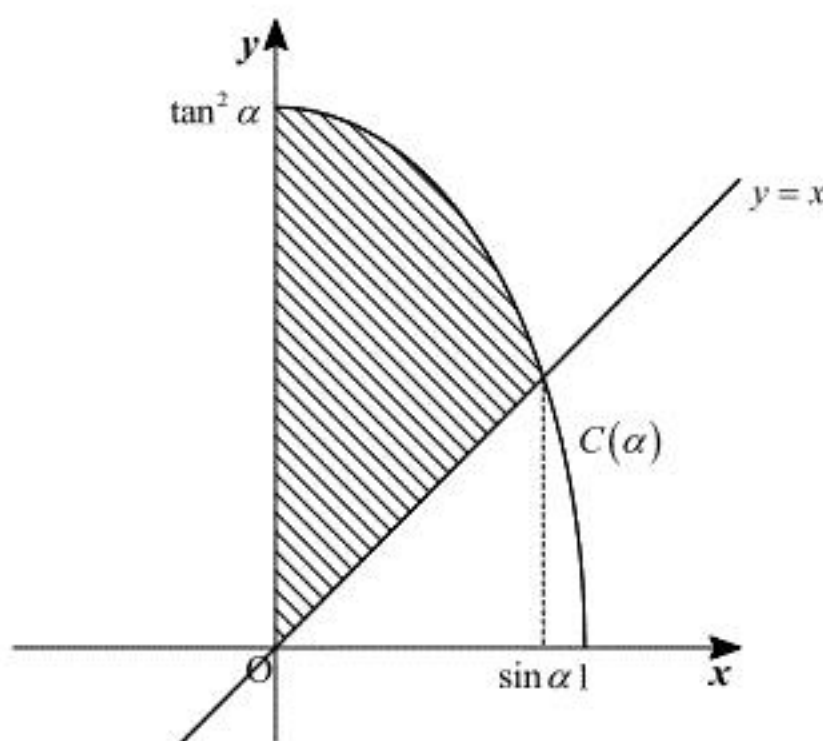
$$(\sin \alpha, \sin \alpha)$$

とわかる。

(答) $(\sin \alpha, \sin \alpha)$

(2)

図形 $D(\alpha)$ を図示すると次の斜線部となる。



$\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ は

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \Leftrightarrow y^2 &= \tan^2 \alpha (1 - x^2)\end{aligned}$$

と変形でき、 $y \geq 0$ 、 $\tan \alpha > 0$ であるから,

$$y = \tan \alpha \sqrt{1 - x^2}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}S(\alpha) &= \int_0^{\sin \alpha} (\tan \alpha \sqrt{1 - x^2} - x) dx \\ &= \tan \alpha \int_0^{\sin \alpha} \sqrt{1 - x^2} dx - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\sin \alpha} \\ &= \tan \alpha \int_0^{\sin \alpha} \sqrt{1 - x^2} dx - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

となる。ここで、 $x = \sin \theta$ とおくと

$$\begin{array}{ccccc} \frac{dx}{d\theta} & = & \cos \theta \\ \hline x & 0 & \rightarrow & \sin \alpha \\ \theta & 0 & \rightarrow & \alpha \end{array}$$

であるから、置換積分をすると,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sin \alpha} \sqrt{1 - x^2} dx &= \int_0^{\alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\alpha} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\alpha} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \\ &= \frac{1}{2} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha)\end{aligned}$$

が得られる。以上より,

$$\begin{aligned}S(\alpha) &= \frac{1}{2} \tan \alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \\ &= \frac{1}{2} \alpha \tan \alpha\end{aligned}$$

とわかる。

(答) $S(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha \tan \alpha$

(3)

求める体積は,

$$\begin{aligned}V(\alpha) &= \pi \int_0^{\sin \alpha} y^2 dx - \frac{1}{3} \cdot \pi \sin^2 \alpha \cdot \sin \alpha \\ &= \pi \tan^2 \alpha \int_0^{\sin \alpha} (1 - x^2) dx - \frac{\pi}{3} \sin^3 \alpha \\ &= \pi \tan^2 \alpha \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\sin \alpha} - \frac{\pi}{3} \sin^3 \alpha \\ &= \pi \sin \alpha \left(\tan^2 \alpha - \frac{1}{3} \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha - \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \right) \\ &= \pi \sin \alpha \left\{ \tan^2 \alpha - \frac{1}{3} \sin^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) \right\} \\ &= \pi \sin \alpha \left(\tan^2 \alpha - \frac{1}{3} \tan^2 \alpha \right) \\ &= \frac{2}{3} \pi \tan^2 \alpha \sin \alpha\end{aligned}$$

である。

(答) $V(\alpha) = \frac{2}{3} \pi \tan^2 \alpha \sin \alpha$

(4)

(2), (3)の結果より,

$$\begin{aligned}\frac{\{V(\alpha)\}^2}{\{S(\alpha)\}^3} &= \frac{\left(\frac{2}{3} \pi \tan^2 \alpha \sin \alpha \right)^2}{\left(\frac{1}{2} \alpha \tan \alpha \right)^3} \\ &= \frac{32}{9} \pi^2 \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^3\end{aligned}$$

となるから,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

であることを用いると,

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\{V(\alpha)\}^2}{\{S(\alpha)\}^3} &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left\{ \frac{32}{9} \pi^2 \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^3 \right\} \\ &= \frac{32}{9} \pi^2 \cdot \frac{1}{1} \cdot 1^3 \\ &= \frac{32}{9} \pi^2\end{aligned}$$

とわかる。

(答) $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\{V(\alpha)\}^2}{\{S(\alpha)\}^3} = \frac{32}{9} \pi^2$