

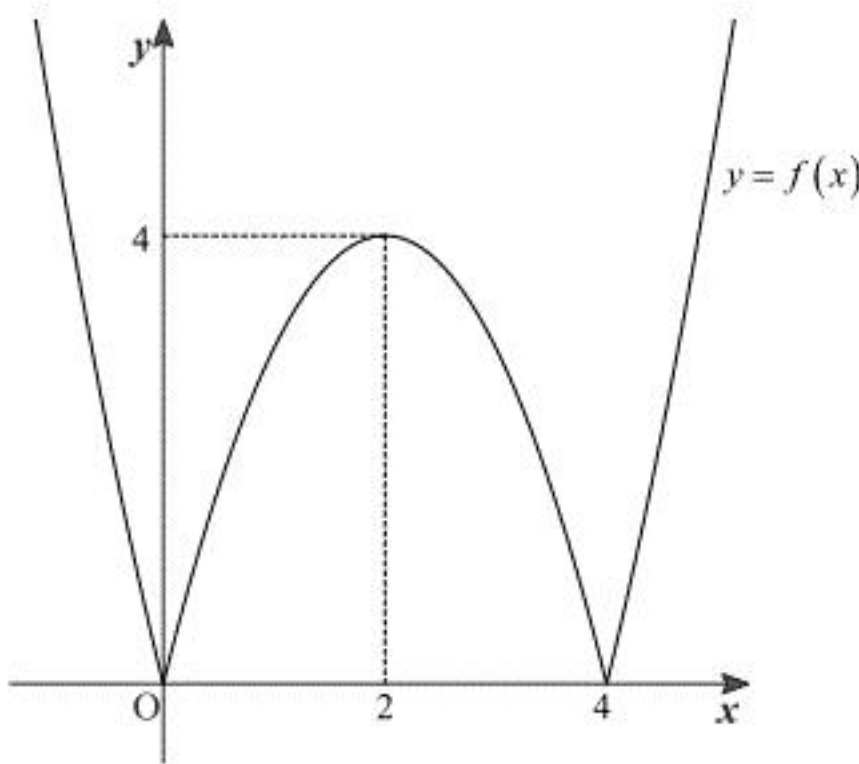
1

(1)

関数 $f(x)$ は、 $f(x)=|x(x-4)|$ であるから、

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x=(x-2)^2-4 & (x\leq 0, 4\leq x) \\ -x^2+4x=-(x-2)^2+4 & (0<x<4) \end{cases}$$

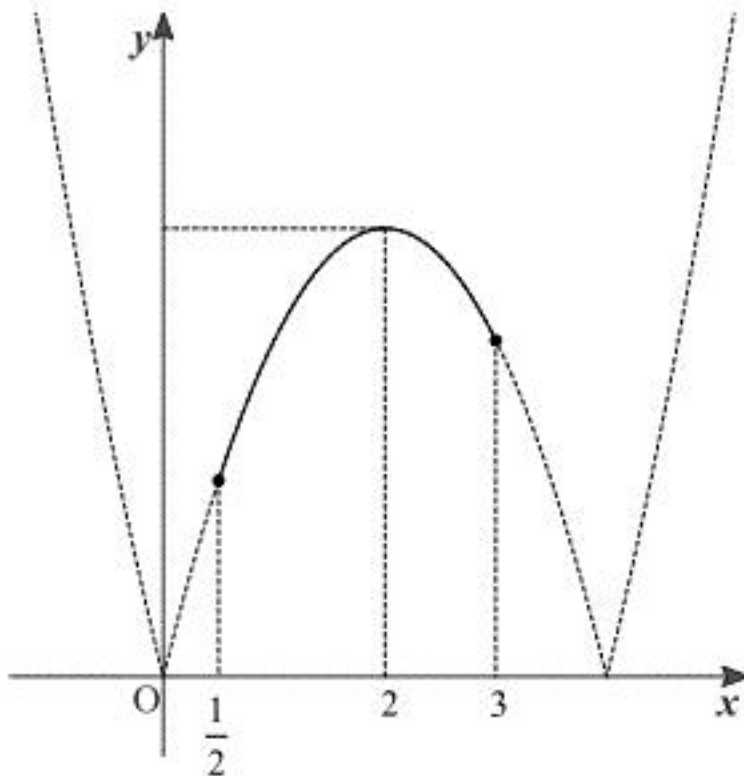
である。したがって、 $y=f(x)$ のグラフは以下のようになる。



(答) 前図

(2)

$y=f(x)$ ($\frac{1}{2}\leq x\leq 3$) のグラフは以下のようになる。



上図より、 $\frac{1}{2}\leq x\leq 3$ において $y=f(x)$ の最大値は、

$$f(2)=|2^2-4\cdot 2|=4$$

であり、最小値は、

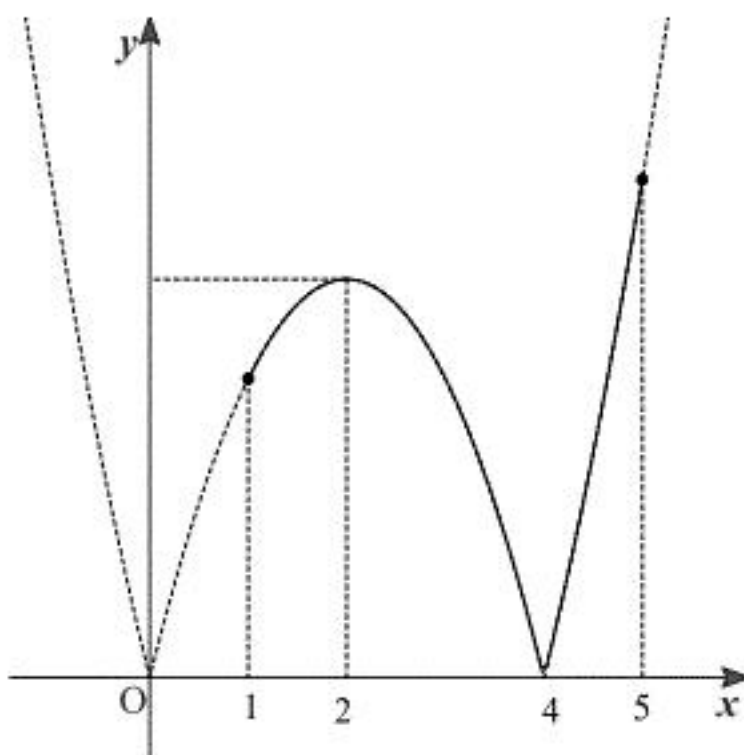
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{7}{4}$$

である。

(答) 最大値：4，最小値： $\frac{7}{4}$

(3)

$y=f(x)$ ($1\leq x\leq 5$) のグラフは以下のようになる。



上図より、 $1\leq x\leq 5$ において $y=f(x)$ の最大値は、

$$f(2)=|2^2-4\cdot 2|=4$$

であり、最小値は、

$$f(4)=|4^2-4\cdot 4|=0$$

である。

(答) 最大値：4，最小値：0

(4)

x の値によって場合分けを行う。

[1] $x\leq 0, 4\leq x$ のとき

$f(x)=x^2-4x$ であることに注意して、曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=-\frac{1}{2}x+2$ の方程式から、

y を消去すると、共有点の x 座標、

$$\begin{aligned} x^2-4x &= -\frac{1}{2}x+2 \\ \Leftrightarrow 2x^2-7x-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x+1)(x-4) &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{1}{2}, 4 \end{aligned}$$

が得られる。これらは、どちらも $x\leq 0, 4\leq x$ を満たす。

[2] $0<x<4$ のとき

$f(x)=-x^2+4x$ であることに注意して、曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=-\frac{1}{2}x+2$ の方程式から、

y を消去すると、共有点の x 座標、

$$\begin{aligned} -x^2+4x &= -\frac{1}{2}x+2 \\ \Leftrightarrow 2x^2-9x+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x-1)(x-4) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{2}, 4 \end{aligned}$$

が得られる。 $x=4$ は $0<x<4$ を満たさないから不適である。

以上[1],[2]より曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=-\frac{1}{2}x+2$ の共有点の x 座標は、

$$x=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4$$

である。

(答) $x=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4$

(1)

問題文より $\overline{AB} = (-2, -1, 1)$ であり、3点 A, B, P は同一直線上にあるから、ベクトル $\overline{AP}$ は媒介変数 t を用いて、

$$\overline{AP} = t\overline{AB} = (-2t, -t, t)$$

と表せる。よって、点 P の座標は、

$$\overline{OP} = \overline{AP} - \overline{OA} = (-2t+3, -t+2, t)$$

より、 $P(-2t+3, -t+2, t)$ と表せる。いま、 $\overline{PQ} = (2t-3, s+t-2, -t)$ であり、 $AB \perp PQ$ がなりたつから、

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{PQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-2) \cdot (2t-3) + (-1) \cdot (s+t-2) + 1 \cdot (-t) &= 0 \\ \Leftrightarrow -6t - s + 8 &= 0 \\ \therefore t &= -\frac{s-8}{6}\end{aligned}$$

が得られる。したがって、点 P の座標は、

$$P\left(\frac{s+1}{3}, \frac{s+4}{6}, \frac{8-s}{6}\right)$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{s+1}{3}, \frac{s+4}{6}, \frac{8-s}{6}\right)$$

(2)

(1)より、

$$\overline{PQ} = \left(-\frac{s+1}{3}, \frac{5s-4}{6}, -\frac{8-s}{6}\right)$$

であるから、 $f(s) > 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}f(s) &= |\overline{PQ}| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{s+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5s-4}{6}\right)^2 + \left(-\frac{8-s}{6}\right)^2} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{4(s^2+2s+1) + (25s^2-40s+16) + (64-16s+s^2)} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{30s^2-48s+84} \\ &= \sqrt{\frac{1}{6}(5s^2-8s+14)}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(s) = \sqrt{\frac{1}{6}(5s^2-8s+14)}$$

(3)

(2)より、 $5s^2-8s+14$ の最小値を求めればよい。ここで、

$$5s^2-8s+14 = 5\left(s-\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{54}{5}$$

と変形できるから、 $5s^2-8s+14$ は $s = \frac{4}{5}$ で最小となる。したがって、 $f(s)$ も $s = \frac{4}{5}$ で最小値をとる。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{4}{5}$$

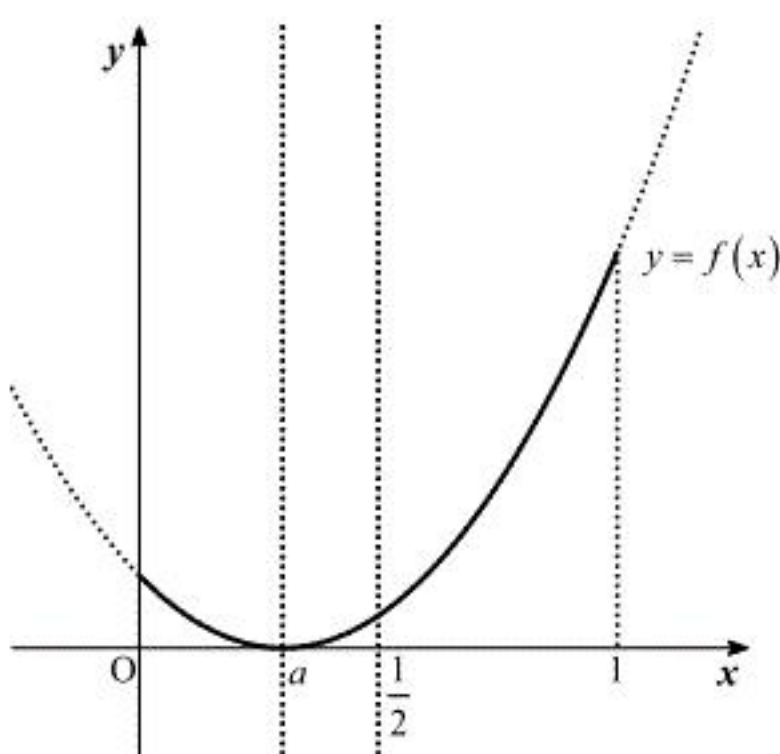
3

(1)

a の値によって場合分けを行う。

[1] $a < \frac{1}{2}$ のとき

以下に、 $y = f(x)$ を図示する。



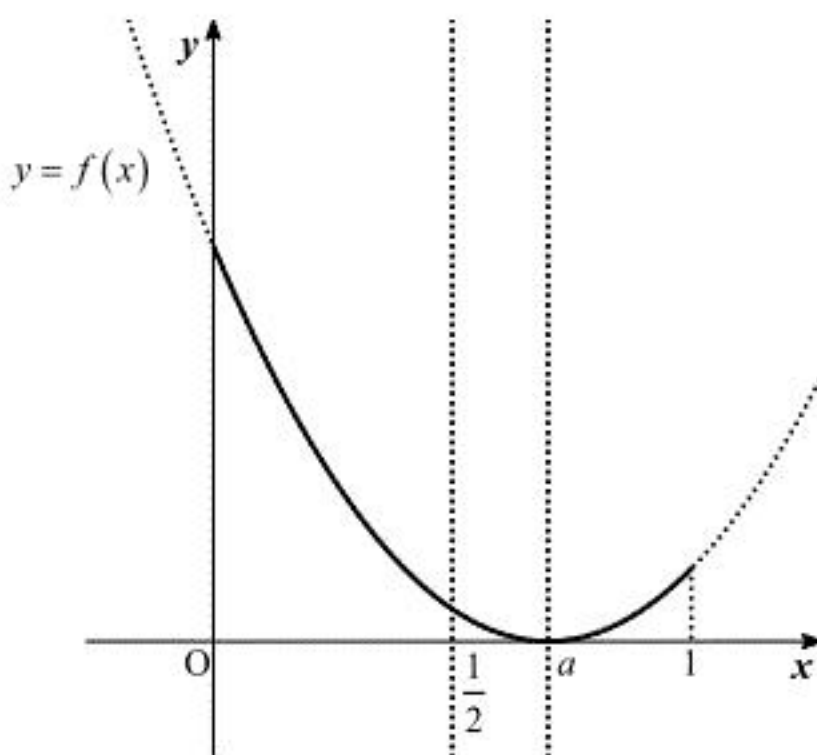
上図より、最大値 $M(a)$ は、

$$M(a) = f(1) = (a-1)^2$$

である。

[2] $a \geq \frac{1}{2}$ のとき

以下に、 $y = f(x)$ を図示する。



上図より、最大値 $M(a)$ は、

$$M(a) = f(0) = a^2$$

である。

以上[1], [2]より、

$$M(a) = \begin{cases} (a-1)^2 & (a < \frac{1}{2}) \\ a^2 & (a \geq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

である。

$$(答) \quad M(a) = \begin{cases} (a-1)^2 & (a < \frac{1}{2}) \\ a^2 & (a \geq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

(2)

$f'(x) = 2(x-a)$ であるから、

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^1 \{2(x-a)\}^2 dx \\ &= 4 \int_0^1 (x-a)^2 dx \\ &= 4 \left[\frac{1}{3}(x-a)^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} \{ (1-a)^3 - (-a)^3 \} \\ &= 4a^2 - 4a + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad I(a) = 4a^2 - 4a + \frac{4}{3}$$

(3)

(1), (2)の結果より、 a の値によって場合分けを行う。

[1] $a < \frac{1}{2}$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} M(a) - I(a) &= (a-1)^2 - \left(4a^2 - 4a + \frac{4}{3} \right) \\ &= -3a^2 + 2a - \frac{1}{3} \\ &= -3 \left(a - \frac{1}{3} \right)^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

であるから、 $M(a) \leq I(a)$ は成り立つ。

[2] $a \geq \frac{1}{2}$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} M(a) - I(a) &= a^2 - \left(4a^2 - 4a + \frac{4}{3} \right) \\ &= -3a^2 + 4a - \frac{4}{3} \\ &= -3 \left(a - \frac{2}{3} \right)^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

であるから、 $M(a) \leq I(a)$ は成り立つ。

以上[1], [2]より、すべての実数 a について、

$$M(a) \leq I(a)$$

が成り立つ。

(証明終)