

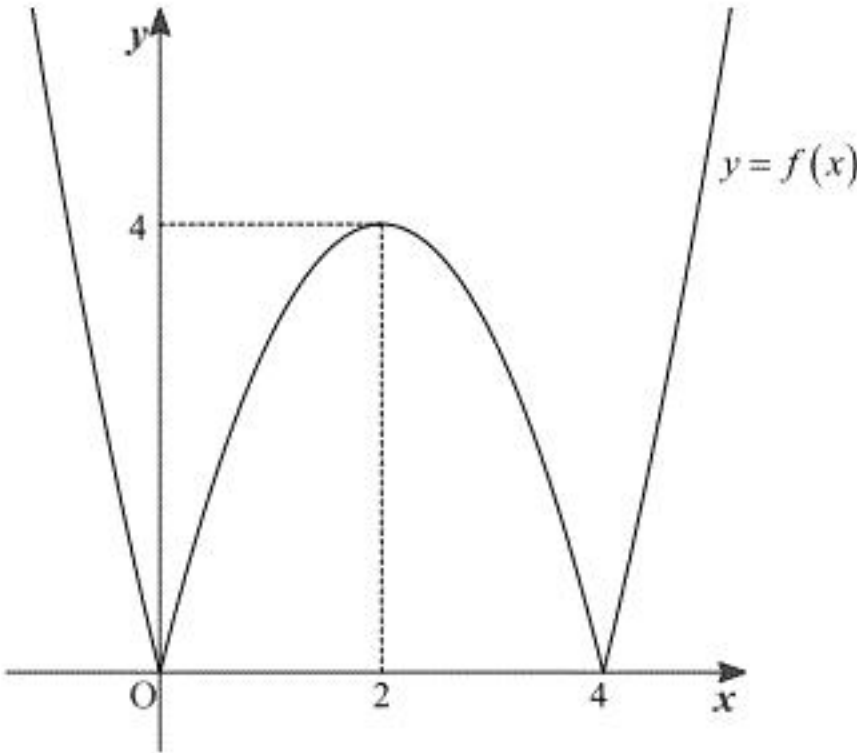
1

(1)

関数  $f(x)$  は、 $f(x)=|x(x-4)|$  であるから、

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x=(x-2)^2-4 & (x\leq 0, 4\leq x) \\ -x^2+4x=-(x-2)^2+4 & (0<x<4) \end{cases}$$

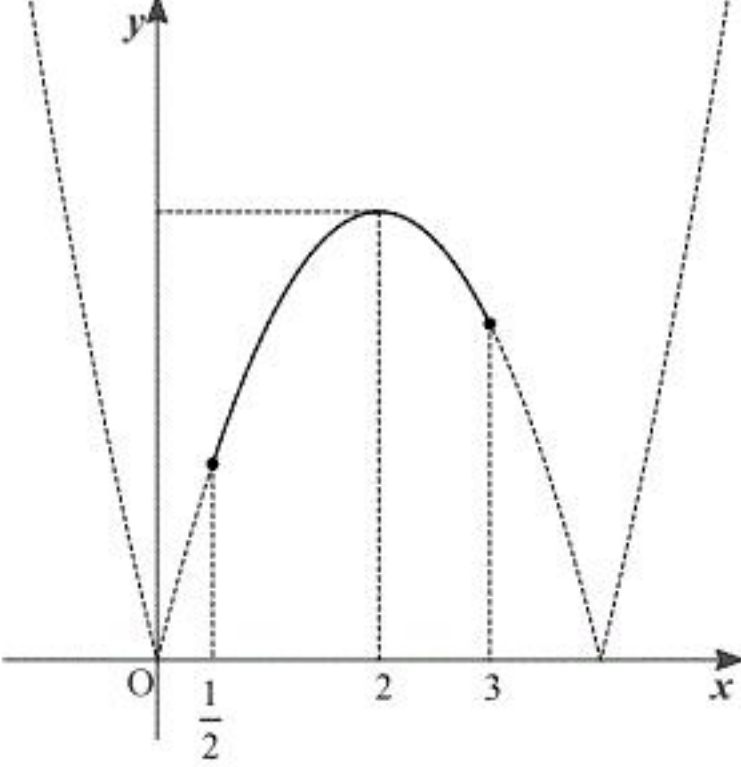
である。したがって、 $y=f(x)$  のグラフは以下になる。



(答) 前図

(2)

$y=f(x)$  ( $\frac{1}{2}\leq x\leq 3$ ) のグラフは以下になる。



上図より、 $\frac{1}{2}\leq x\leq 3$  において  $y=f(x)$  の最大値は、

$$f(2)=|2^2-4\cdot 2|=4$$

であり、最小値は、

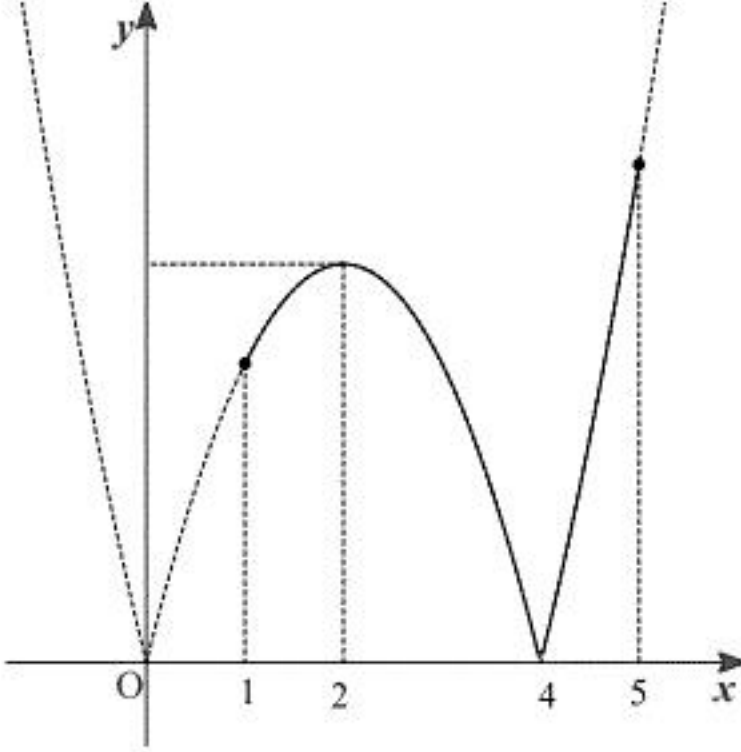
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{7}{4}$$

である。

(答) 最大値：4，最小値： $\frac{7}{4}$

(3)

$y=f(x)$  ( $1\leq x\leq 5$ ) のグラフは以下になる。



上図より、 $1\leq x\leq 5$  において  $y=f(x)$  の最大値は、

$$f(2)=|2^2-4\cdot 2|=4$$

であり、最小値は、

$$f(4)=|4^2-4\cdot 4|=0$$

である。

(答) 最大値：4，最小値：0

(4)

$x$  の値によって場合分けを行う。

[1]  $x\leq 0, 4\leq x$  のとき

$f(x)=x^2-4x$  であることに注意して、曲線  $y=f(x)$  と直線  $y=-\frac{1}{2}x+2$  の方程式から、  
 $y$  を消去すると、共有点の  $x$  座標、

$$\begin{aligned} x^2-4x &= -\frac{1}{2}x+2 \\ \Leftrightarrow 2x^2-7x-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x+1)(x-4) &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{1}{2}, 4 \end{aligned}$$

が得られる。これらは、どちらも  $x\leq 0, 4\leq x$  を満たす。

[2]  $0<x<4$  のとき

$f(x)=-x^2+4x$  であることに注意して、曲線  $y=f(x)$  と直線  $y=-\frac{1}{2}x+2$  の方程式から、  
 $y$  を消去すると、共有点の  $x$  座標、

$$\begin{aligned} -x^2+4x &= -\frac{1}{2}x+2 \\ \Leftrightarrow 2x^2-9x+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x-1)(x-4) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{2}, 4 \end{aligned}$$

が得られる。 $x=4$  は  $0<x<4$  を満たさないから不適である。

以上[1],[2]より曲線  $y=f(x)$  と直線  $y=-\frac{1}{2}x+2$  の共有点の  $x$  座標は、

$$x=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4$$

である。

(答)  $x=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4$

(1)

与えられた放物線は,

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4(m-3)x + 1 \\ &= \{x - 2(m-3)\}^2 - 4(m-3)^2 + 1 \end{aligned}$$

と変形できるから、頂点  $P_m$  の座標は  $(2(m-3), -4(m-3)^2 + 1)$  である。

さて、 $P_m$  が  $x > 0$  かつ  $y < 0$  の範囲にあるとき、

$$\text{「} 2(m-3) > 0 \text{」 かつ 「} -4(m-3)^2 + 1 < 0 \text{」}$$

$$\Leftrightarrow \text{「} m > 3 \text{」 かつ 「} (m-3)^2 > \frac{1}{4} \text{」}$$

$$\Leftrightarrow m - 3 > \frac{1}{2}$$

$$\therefore m \geq 4 \quad (\because m \text{ は整数})$$

を満たす。ここで、 $m$  は 1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかであるから、 $P_m$  が  $x > 0$  かつ  $y < 0$  の範囲にあるとき、 $m = 4, 5, 6$  である。したがって、求める確率は、

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

である。

(答)  $\frac{1}{2}$

(2)

$P_m$  が  $x < 0$  かつ  $y < 0$  の範囲にあるとき、

$$\text{「} 2(m-3) < 0 \text{」 かつ 「} -4(m-3)^2 + 1 < 0 \text{」}$$

$$\Leftrightarrow \text{「} m < 3 \text{」 かつ 「} (m-3)^2 > \frac{1}{4} \text{」}$$

$$\Leftrightarrow m - 3 < -\frac{1}{2}$$

$$\therefore m \leq 2 \quad (\because m \text{ は整数})$$

を満たす。ここで、 $m$  は 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかであるから、 $P_m$  が  $x < 0$  かつ  $y < 0$  の範囲にあるとき、 $m = 0, 1, 2$  である。これらはそれぞれ排反な事象であるから、求める確率は、

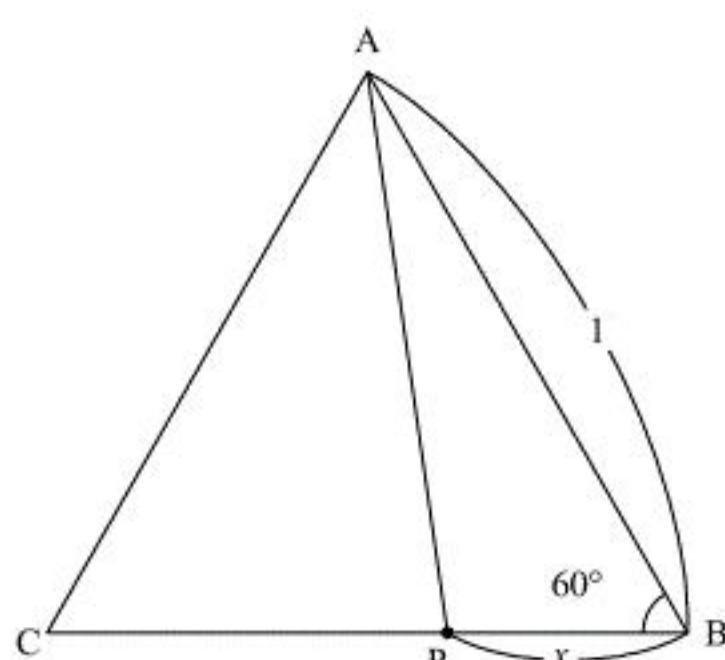
$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_6C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = (1+6+15) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{11}{32}$$

である。

(答)  $\frac{11}{32}$

(1)

以下に正三角形 ABC を図示する。



上図より、余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} AP^2 &= BA^2 + BP^2 - 2BA \cdot BP \cos \angle ABP \\ &= 1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cos 60^\circ \\ &= x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore AP = \sqrt{x^2 - x + 1} \quad (\because AP > 0)$$

である。

$$(\text{答}) \quad AP = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

(2)

(1)より、 $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$  であり、

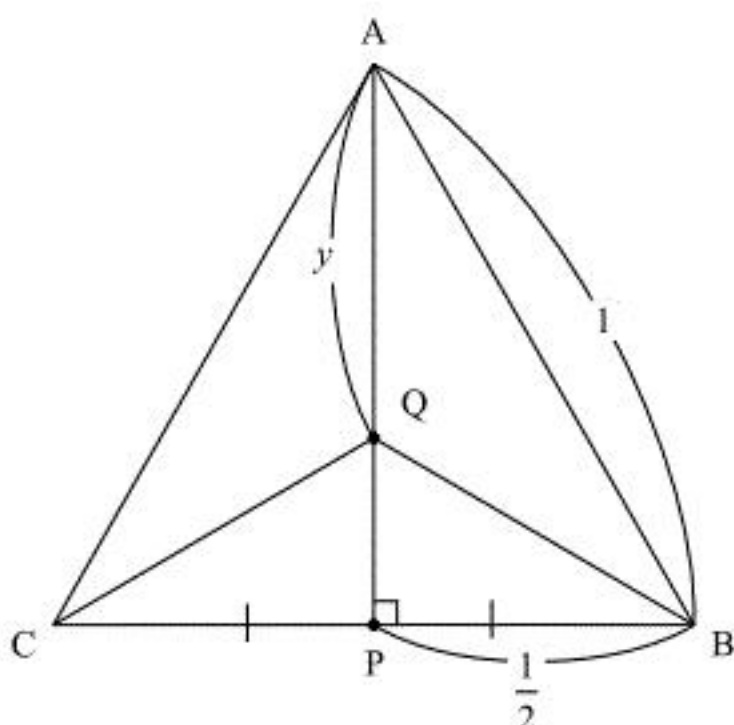
$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

と変形できる。ここで、 $0 \leq x \leq 1$  であるから、 $f(x)$  は  $x = \frac{1}{2}$  で最小値  $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3)

以下に正三角形 ABC および点 P, Q を示す。



まず、 $y$  は  $0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  を満たす。(1)より  $AP = \frac{\sqrt{3}}{2}$  であるから、上図より、

$$PQ = \frac{\sqrt{3}}{2} - y$$

である。これより、三平方の定理を用いると、

$$\begin{aligned} BQ^2 &= PQ^2 + PB^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= y^2 - \sqrt{3}y + 1 \end{aligned}$$

$$BQ = \sqrt{y^2 - \sqrt{3}y + 1} \quad (\because BQ > 0)$$

である。ここで、対称性より  $CQ = BQ$  であるから、

$$g(y) = AQ + BQ + CQ = y + 2\sqrt{y^2 - \sqrt{3}y + 1}$$

である。このとき、

$$g'(y) = 1 + \frac{2y - \sqrt{3}}{\sqrt{y^2 - \sqrt{3}y + 1}}$$

であるから、 $g'(y) = 0$  を満たす  $y$  は  $0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  の範囲において、

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2y - \sqrt{3}}{\sqrt{y^2 - \sqrt{3}y + 1}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} - 2y &= \sqrt{y^2 - \sqrt{3}y + 1} \\ \Leftrightarrow 4y^2 - 4\sqrt{3}y + 3 &= y^2 - \sqrt{3}y + 1 \quad \left(\because \sqrt{3} - 2y > 0, \sqrt{y^2 - \sqrt{3}y + 1} > 0\right) \\ \Leftrightarrow 3y^2 - 3\sqrt{3}y + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{3}y - 2)(\sqrt{3}y - 1) &= 0 \\ \therefore y &= \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\because 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}) \end{aligned}$$

である。以下に  $g(y)$  の増減を示す。

|         |            |            |                      |            |                      |
|---------|------------|------------|----------------------|------------|----------------------|
| $y$     | 0          | ...        | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | ...        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $g'(y)$ | $\swarrow$ | -          | 0                    | +          | $\swarrow$           |
| $g(y)$  |            | $\searrow$ | 極小                   | $\nearrow$ |                      |

上表より、 $g(y)$  は  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$  で最小値

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{3}$$