

(1)

1回目の操作の後、かならず $A_1 = 1$ となるから、

$$p_1 = 0, q_1 = 1$$

である。

また、 $A_2 = 2$ となるとき、Z または W に1つ入っていた玉が選ばれ、空いている箱のうち X または Y の箱に玉を入れればよいから、この確率は、

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。さらに、 $A_2 = 0$ となるとき、X または Y に1つ入っていた玉が選ばれ、空いている箱のうち Z または W の箱に玉を入れればよいから、この確率は、

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。以上の2つの場合は排反であるから、

$$p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

である。一方、余事象を考えると、

$$q_2 = 1 - p_2 = \frac{1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_1 = 0, q_1 = 1, p_2 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2}$$

(2)

$A_n = 0$ のとき、 $n+1$ 回目では必ず $A_{n+1} = 1$ となり、 $A_n = 2$ のときも、 $n+1$ 回目では必ず $A_{n+1} = 1$ となる。一方で(1)と同様に考えると、 $A_n = 1$ のとき、

$$\frac{1}{4} \text{ の確率で } A_{n+1} = 2,$$

$$\frac{1}{4} \text{ の確率で } A_{n+1} = 0,$$

$$\frac{1}{2} \text{ の確率で } A_{n+1} = 1$$

となる。以上より、 p_{n+1}, q_{n+1} と p_n, q_n の関係は、

$$\begin{cases} p_{n+1} = q_n \cdot \frac{1}{4} + q_n \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} q_n & \cdots \text{①} \\ q_{n+1} = p_n + q_n \cdot \frac{1}{2} = p_n + \frac{1}{2} q_n & \cdots \text{②} \end{cases}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = \frac{1}{2} q_n, q_{n+1} = p_n + \frac{1}{2} q_n$$

(3)

②より $p_n = q_{n+1} - \frac{1}{2} q_n$ であるから、これを①に代入して、 q_n についての漸化式、

$$q_{n+2} = \frac{1}{2} q_{n+1} + \frac{1}{2} q_n$$

が得られる。上式は、

$$q_{n+2} - q_{n+1} = -\frac{1}{2} (q_{n+1} - q_n)$$

と変形でき、これより数列 $\{q_{n+1} - q_n\}$ は初項 $q_2 - q_1 = -\frac{1}{2}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であることが分かるから、一般項は、

$$q_{n+1} - q_n = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

である。さらに、 $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ は数列 $\{q_n\}$ の階差数列であるから、数列 $\{q_n\}$ の一般項は $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} q_n &= q_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 1 + \frac{-\frac{1}{2} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= 1 - \frac{1}{3} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

である。 $n=1$ のとき、 $q_1 = 1$ より一致するから、すべての自然数 n に対してこれは成り立つ。

$$(\text{答}) \quad q_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(1)

与えられた放物線は,

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4(m-3)x + 1 \\ &= \{x - 2(m-3)\}^2 - 4(m-3)^2 + 1 \end{aligned}$$

と変形できるから、頂点 P_m の座標は $(2(m-3), -4(m-3)^2 + 1)$ である。

さて、 P_m が $x > 0$ かつ $y < 0$ の範囲にあるとき、

$$\text{「} 2(m-3) > 0 \text{」 かつ 「} -4(m-3)^2 + 1 < 0 \text{」}$$

$$\Leftrightarrow \text{「} m > 3 \text{」 かつ 「} (m-3)^2 > \frac{1}{4} \text{」}$$

$$\Leftrightarrow m-3 > \frac{1}{2}$$

$$\therefore m \geq 4 \quad (\because m \text{ は整数})$$

を満たす。ここで、 m は 1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかであるから、 P_m が $x > 0$ かつ $y < 0$ の範囲にあるとき、 $m = 4, 5, 6$ である。したがって、求める確率は、

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

P_m が $x < 0$ かつ $y < 0$ の範囲にあるとき、

$$\text{「} 2(m-3) < 0 \text{」 かつ 「} -4(m-3)^2 + 1 < 0 \text{」}$$

$$\Leftrightarrow \text{「} m < 3 \text{」 かつ 「} (m-3)^2 > \frac{1}{4} \text{」}$$

$$\Leftrightarrow m-3 < -\frac{1}{2}$$

$$\therefore m \leq 2 \quad (\because m \text{ は整数})$$

を満たす。ここで、 m は 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかであるから、 P_m が $x < 0$ かつ $y < 0$ の範囲にあるとき、 $m = 0, 1, 2$ である。これらはそれぞれ排反な事象であるから、求める確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_6C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = (1+6+15) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{11}{32}$$

である。

(答) $\frac{11}{32}$

(1)

直線 $y = mx + n$ と楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ の方程式から、 y を消去すると、 x についての2次方程式、

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{4}(mx+n)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (m^2+4)x^2 + 2mnx + n^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。 $m^2+4>0$ であるから、この2次方程式の判別式を D とすると、直線 $y = mx + n$

が楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ に接するための条件は、 $D=0$ となることである。したがって、求める条件

を m, n で表すと、

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (mn)^2 - (m^2+4)(n^2-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4m^2 - 4n^2 + 16 &= 0 \\ \therefore m^2 - n^2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

である。

(答) $m^2 - n^2 + 4 = 0$

(2)

点 $(2, 1)$ を通る接線は y 軸に平行ではないから、 $y = mx + n$ の形で表され、このとき m, n は、

$$\begin{aligned} 1 &= m \cdot 2 + n \\ \Leftrightarrow 2m + n &= 1 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を満たす。また、(1)で導かれた式も満たすから、①と(1)の結果より、 n を消去すると、

$$\begin{aligned} m^2 - (-2m+1)^2 + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3m^2 - 4m - 3 &= 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が得られる。②の解をそれぞれ m_1, m_2 とすると、解と係数の関係より、

$$m_1 m_2 = \frac{-3}{3} = -1$$

となる。ここで、 m_1, m_2 は点 $(2, 1)$ から引かれる2つの接線の傾きであるから、 $m_1 m_2 = -1$ より2つの接線は互いに直交する。

(証明終)

(3)

2つの接線の交点の座標を (X, Y) とする。 $X \neq \pm 1$ のとき、点 (X, Y) を通る接線は y 軸に平行ではないから、 $y = mx + n$ の形で表され、このとき m, n は、

$$\begin{aligned} Y &= m \cdot X + n \\ \Leftrightarrow mX + n &= Y \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

を満たす。ここで、③と(1)の結果より、 n を消去すると、

$$\begin{aligned} m^2 - (-mX+Y)^2 + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (X^2-1)m^2 - 2XYm + Y^2 - 4 &= 0 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

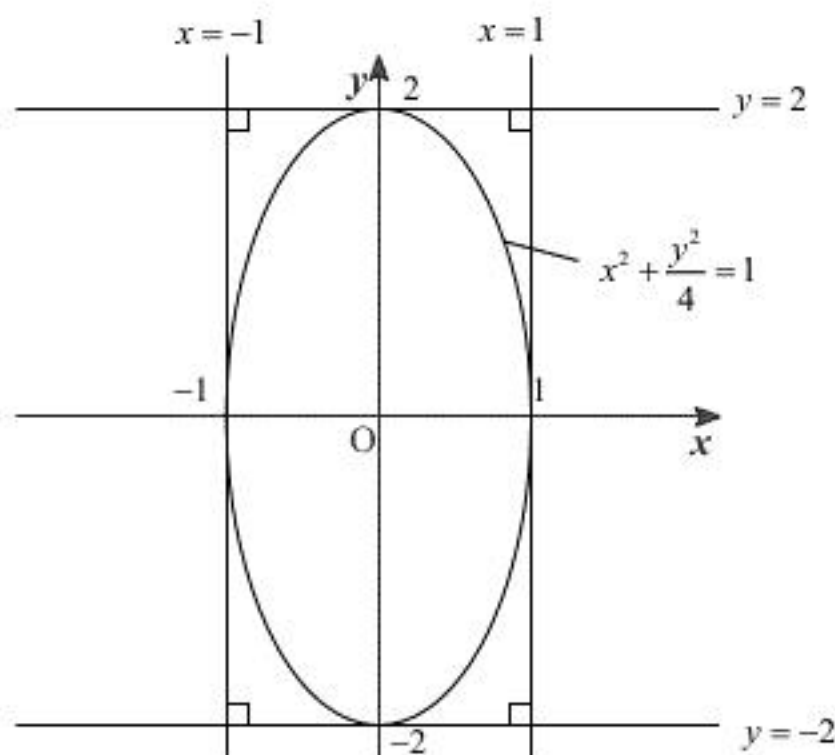
が得られる。④の解をそれぞれ m_3, m_4 とすると、解と係数の関係より、

$$m_3 m_4 = \frac{Y^2-4}{X^2-1} \quad (\because X \neq \pm 1)$$

である。ここで、 m_3, m_4 は点 (X, Y) から引かれる2つの接線の傾きであるから、 $m \neq 0$ より、2つの接線が互いに直交することと、

$$\begin{aligned} m_3 m_4 &= -1 \\ \Leftrightarrow \frac{Y^2-4}{X^2-1} &= -1 \\ \Leftrightarrow X^2 + Y^2 &= 5 \end{aligned}$$

を満たすことは同値である。ただし、 $X \neq \pm 1$ より、点 $(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$ は除く。また、 $X = \pm 1$ のときの2つの互いに直交する接線を以下に示す。



上図より、 $X = \pm 1$ のとき、2つの互いに直交する接線の交点は、

$$(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$$

の4つである。以上より、求める軌跡は、

$$x^2 + y^2 = 5$$

である。

(答) $x^2 + y^2 = 5$