

(1)

背理法を利用して、不定方程式 $6x+2y=1$ は整数解を持たないことを示す。すなわち、不定方程式 $6x+2y=1$ が整数解を持つと仮定して矛盾を導く。整数の組 (a, b) が $6x+2y=1$ の解である、つまり $6a+2b=1$ が成立すると仮定したとき、

$$\begin{aligned} 6a+2b &= 1 \\ \Leftrightarrow 2(3a+b) &= 1 \\ \Leftrightarrow 3a+b &= \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となるが、 $\textcircled{1}$ 式の左辺は整数であるのに対し、右辺は整数ではなく矛盾が生じている。よって、仮定は誤りであり、不定方程式 $6x+2y=1$ は整数解を持たないことが示された。

(証明終)

(2)

ユークリッドの互除法を用いると、

$$\begin{aligned} 43 &= 24 \cdot 1 + 19 \\ 24 &= 19 \cdot 1 + 5 \\ 19 &= 5 \cdot 3 + 4 \\ 5 &= 4 \cdot 1 + 1 \end{aligned}$$

が得られる。これを逆から代入していくと、

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 4 \\ &= 5 - (19 - 5 \cdot 3) \\ &= 4 \cdot 5 - 19 \\ &= 4 \cdot (24 - 19) - 19 \\ &= 4 \cdot 24 - 5 \cdot 19 \\ &= 4 \cdot 24 - 5 \cdot (43 - 24) \\ &= -5 \cdot 43 + 9 \cdot 24 \end{aligned}$$

となる。 $1 = -5 \cdot 43 + 9 \cdot 24$ の両辺を 2 倍して $2 = -10 \cdot 43 + 18 \cdot 24$ が得られる。以上より、 $(x, y) = (-10, 18)$ は、不定方程式 $43x + 24y = 2$ の整数解の 1 組である。

(答) $(x, y) = (-10, 18)$

(3)

(2)より、連立方程式

$$\begin{cases} 43 \cdot (-10) + 24 \cdot 18 = 2 & \cdots \textcircled{2} \\ 43x + 24y = 2 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

が得られる。 $\textcircled{3}$ から $\textcircled{2}$ を辺々引き算すると、

$$\begin{aligned} 43(x+10) + 24(y-18) &= 0 \\ \Leftrightarrow 43(x+10) &= 24(18-y) \end{aligned}$$

となる。 43 と 24 は互いに素であるから、整数の組 (x, y) は整数 k を用いて、

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+10 = 24k \\ 18-y = 43k \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24k-10 \\ y = -43k+18 \end{cases} \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $|x| \leq 30$ を満たす k は、

$$\begin{aligned} |x| &\leq 30 \\ \Leftrightarrow |24k-10| &\leq 30 \\ \therefore k &= 0, 1 \quad (\because k \text{ は整数}) \end{aligned}$$

であり、 $|y| \leq 30$ を満たす k は、

$$\begin{aligned} |y| &\leq 30 \\ \Leftrightarrow |-43k+18| &\leq 30 \\ \therefore k &= 0, 1 \quad (\because k \text{ は整数}) \end{aligned}$$

である。以上より、求める整数解は $(x, y) = (-10, 18), (14, -25)$ である。

(答) $(x, y) = (-10, 18), (14, -25)$

(1)

$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OA}$ のなす角は 45° であり, $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角は 120° であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} &= |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{4}$$

(2)

$P(x, y, z)$ とおくと,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 0 = x$$

であるから, (1) より $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ である。同様に,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 1 = z$$

であるから, (1) より $z = -\frac{1}{4}$ である。これより, 点 P の y 座標は正であることに注意すると,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + y^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{4} \quad (\because y > 0)\end{aligned}$$

が得られる。したがって, 点 P の座標は $P\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ となる。一方, 点 Q は点 P の y 座標を

負にしたものであるから, $Q\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), Q\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

(3)

(2) より, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}$ であるから, $\triangle OPQ$ は1辺の大きさが $\frac{1}{2}$ の正三角形である。よって, 外接円

の半径の大きさを R とすると, 正弦定理より

$$\begin{aligned}2R &= \frac{\frac{1}{2}}{\sin 60^\circ} \\ \Leftrightarrow R &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

である。よって, 外接円の面積は $\pi R^2 = \frac{\pi}{12}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{12}$$

3

(1)

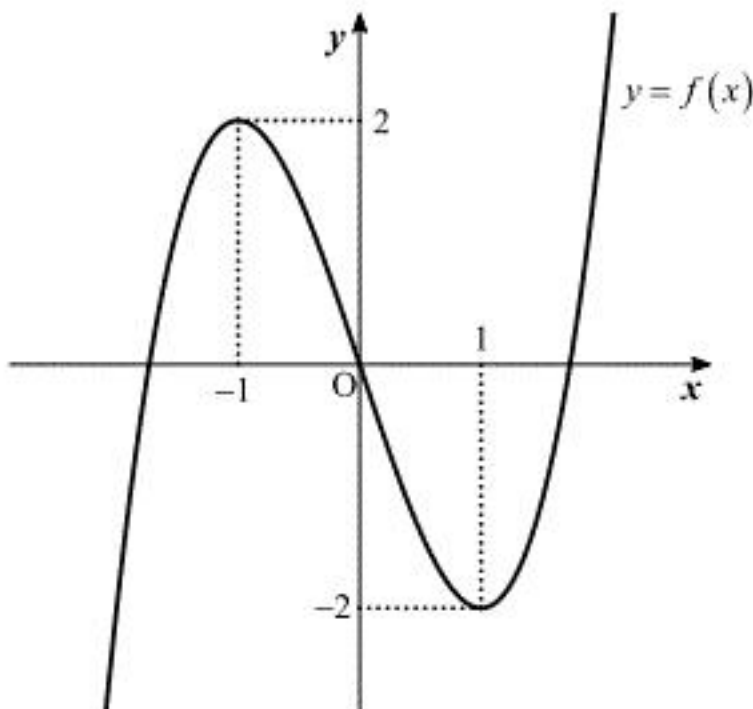
$f(x) = x^3 - 3x$ について、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

であるから、 $f'(x) = 0$ を満たす x は $x = \pm 1$ である。以下に、 $f(x)$ の増減表を示す。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より、曲線 $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



(答) 増減：前表，グラフ：前図

(2)

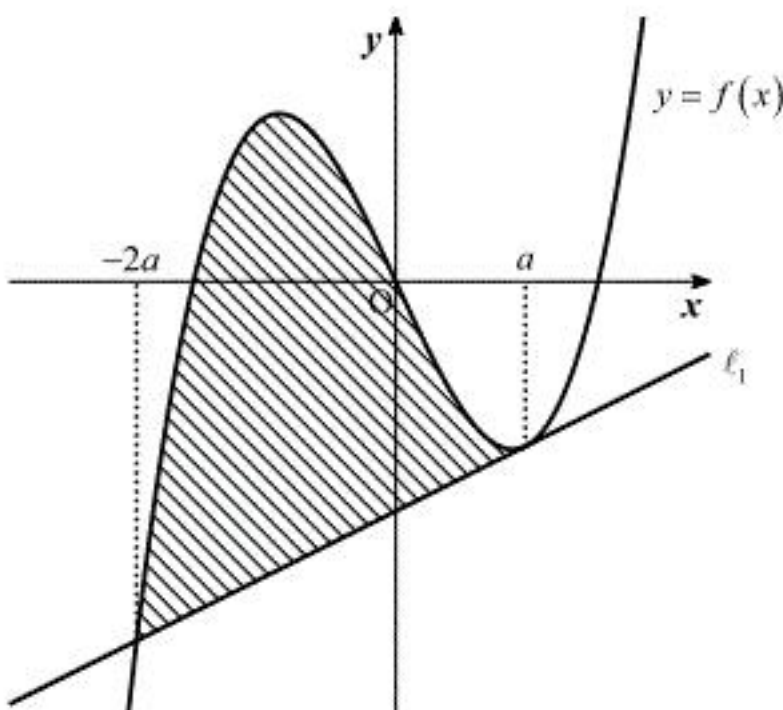
曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線 ℓ_1 の式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ \Leftrightarrow y &= (3a^2-3)(x-a) + (a^3-3a) \\ \Leftrightarrow y &= (3a^2-3)x - 2a^3 \end{aligned}$$

である。曲線 $y = f(x)$ と接線 ℓ_1 の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x^3 - 3x &= (3a^2-3)x - 2a^3 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-a)^2(x+2a) &= 0 \\ \therefore x &= a, -2a \end{aligned}$$

であり、 $a > 0$ より $a > -2a$ である。以上より、曲線 $y = f(x)$ と直線 ℓ_1 で囲まれる図形は、下図の斜線部である。



上図より、求める面積 $S_1(a)$ は、

$$\begin{aligned} S_1(a) &= \int_{-2a}^a \left[(x^3 - 3x) - \{(3a^2-3)x - 2a^3\} \right] dx \\ &= \int_{-2a}^a (x^3 - 3a^2x + 2a^3) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3a^2x^2}{2} + 2a^3x \right]_{-2a}^a \\ &= \left(\frac{a^4}{4} - \frac{3a^4}{2} + 2a^4 \right) - (4a^4 - 6a^4 - 4a^4) \\ &= \frac{27a^4}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\ell_1: y = (3a^2-3)x - 2a^3, S_1(a) = \frac{27a^4}{4}$

(3)

実数 t に対して、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, t^3 - 3t)$ における接線の式は、(2)の接線 ℓ_1 の式の a を

t に置き換えて、

$$y = (3t^2-3)x - 2t^3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。この接線が点 $(a, a^3 - 3a)$ を通るとき、接点の x 座標 t の値は、

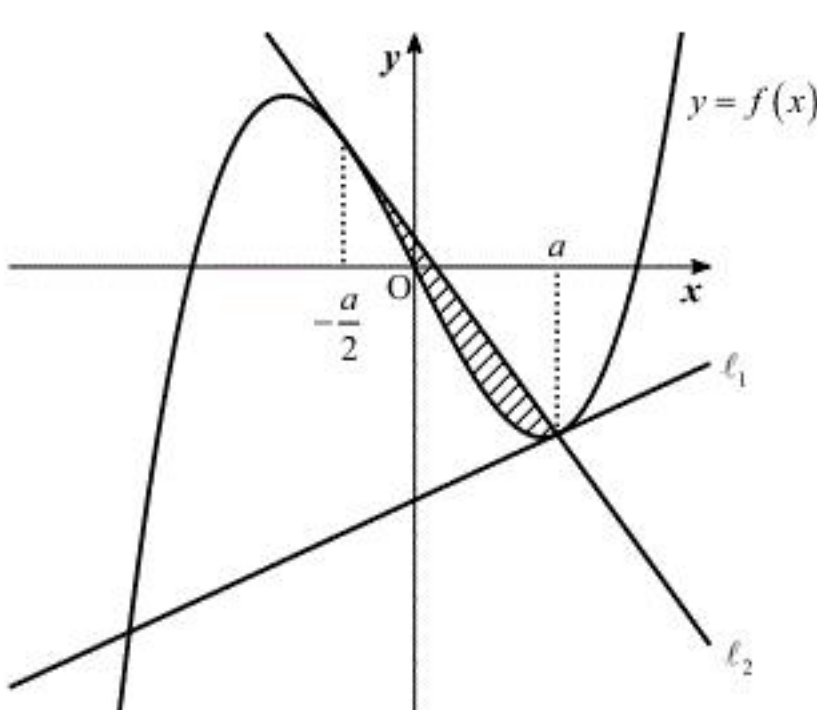
$$\begin{aligned} a^3 - 3a &= (3t^2-3)a - 2t^3 \\ \Leftrightarrow 2t^3 - 3at^2 + a^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-a)^2(2t+a) &= 0 \\ \therefore t &= a, -\frac{a}{2} \end{aligned}$$

である。直線 ℓ_2 は $x \neq a$ となる点で曲線 $y = f(x)$ と接するから、曲線 $y = f(x)$ と直線 ℓ_2 の接

点の x 座標は $-\frac{a}{2}$ である。よって、直線 ℓ_2 の式は、①に $t = -\frac{a}{2}$ を代入して、

$$y = \left(\frac{3a^2}{4} - 3 \right)x + \frac{a^3}{4}$$

である。以上より、 $a > 0$ に注意して、 $y = f(x)$ と直線 ℓ_2 で囲まれる図形を以下の斜線部で示す。



以上より、求める面積 $S_2(a)$ は、

$$\begin{aligned} S_2(a) &= \int_{-\frac{a}{2}}^a \left[\left\{ \left(\frac{3a^2}{4} - 3 \right)x + \frac{a^3}{4} \right\} - (x^3 - 3x) \right] dx \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^a \left(-x^3 + \frac{3a^2x}{4} + \frac{a^3}{4} \right) dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3a^2x^2}{8} + \frac{a^3x}{4} \right]_{-\frac{a}{2}}^a \\ &= \left(-\frac{a^4}{4} + \frac{3a^4}{8} + \frac{a^4}{4} \right) - \left(-\frac{a^4}{64} + \frac{3a^4}{32} - \frac{a^4}{8} \right) \\ &= \frac{27a^4}{64} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\frac{S_1(a)}{S_2(a)} = \frac{\frac{27a^4}{4}}{\frac{27a^4}{64}} = 16$$

である。

(答) $\ell_2: y = \left(\frac{3a^2}{4} - 3 \right)x + \frac{a^3}{4}, \frac{S_1(a)}{S_2(a)} = 16$