

(1)

背理法を利用して、不定方程式 $6x+2y=1$ が整数解を持たないことを示す。すなわち、不定方程式 $6x+2y=1$ が整数解を持つと仮定して矛盾を導く。整数の組 (x, y) が $6x+2y=1$ を満たすとして、与えられた方程式を変形すると、

$$\begin{aligned} 6x+2y &= 1 \\ \Leftrightarrow 3x+y &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 x, y は整数であるから $3x+y$ も整数となるが、右辺は明らかに整数ではないから矛盾が生じる。したがって、仮定は誤りであり不定方程式 $6x+2y=1$ は整数解を持たない。

(証明終)

(2)

ユークリッドの互除法より、

$$\begin{aligned} 43 &= 24+19 \Leftrightarrow 19 = 43-24 \\ 24 &= 19+5 \Leftrightarrow 5 = 24-19 \\ 19 &= 5 \times 3 + 4 \Leftrightarrow 4 = 19-5 \times 3 \\ 5 &= 4+1 \Leftrightarrow 1 = 5-4 \end{aligned}$$

が得られるから、逆に代入していくと、

$$\begin{aligned} 1 &= 5-4 \\ &= (24-19)-(19-5 \times 3) \\ &= 24-(43-24)-(43-24)+(24-19) \times 3 \\ &= 43 \times (-2) + 24 \times 6 - 3 \times (43-24) \\ &= 43 \times (-5) + 24 \times 9 \end{aligned}$$

が成立する。この両辺を 2 倍すると

$$43 \times (-10) + 24 \times 18 = 2$$

であるから、 $(x, y) = (-10, 18)$ が与えられた不定方程式の整数解の 1 組となる。

(答) $(x, y) = (-10, 18)$

(3)

(2) から得られた連立方程式

$$\begin{cases} 43x+24y=2 \\ 43 \cdot (-10)+24 \cdot 18=2 \end{cases}$$

の辺々引くと

$$\begin{aligned} 43(x+10)+24(y-18) &= 0 \\ \Leftrightarrow 43(x+10) &= 24(18-y) \end{aligned}$$

が成立する。24 と 43 が互いに素であるから、一般解は整数 n を用いると、

$$\begin{cases} x+10=24n \\ 18-y=43n \end{cases} \\ \therefore x=24n-10, y=18-43n$$

と表せる。ここで、

$$\begin{aligned} |x| &\leq 30 \\ \Leftrightarrow |24n-10| &\leq 30 \end{aligned}$$

を満たす整数 n は $n=0, 1$ であり、

$$\begin{aligned} |y| &\leq 30 \\ \Leftrightarrow |18-43n| &\leq 30 \end{aligned}$$

を満たす整数 n は $n=0, 1$ であるから、題意を満たす解は $(x, y) = (-10, 18), (14, -25)$ の 2 組である。

(答) $(x, y) = (-10, 18), (14, -25)$

2

(1)

$t = \frac{\pi}{4}$ のとき $x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから, このとき $\frac{dy}{dx}$ について,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\pi \sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{2} - \pi}{\pi}$$

が成立する。よって, 求める接線の傾きは $\frac{2\sqrt{2} - \pi}{\pi}$ である。

(答) $\frac{2\sqrt{2} - \pi}{\pi}$

(2)

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ より $0 < \cos t < 1$ であるから $\frac{dy}{dx}, \frac{dx}{dt}$ を t の式で表すと,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2 - \pi \sin t}{\pi \sqrt{1 - \sin^2 t}} = \frac{2 - \pi \sin t}{\pi \cos t} \\ \frac{dx}{dt} = \cos t \end{cases}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{2 - \pi \sin t}{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} - \sin t \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{\pi} - \sin t$

(3)

(2)の結果より,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int \frac{dy}{dt} dt \\ &= \int \left(\frac{2}{\pi} - \sin t \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} t + \cos t + C \end{aligned}$$

と表せる(C は積分定数)。 $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ より,

$$\begin{aligned} 1 + C &= 0 \\ \therefore C &= -1 \end{aligned}$$

であるから,

$$y(t) = \frac{2}{\pi} t + \cos t - 1$$

である。

(答) $y(t) = \frac{2}{\pi} t + \cos t - 1$

(4)

(2)の結果より, $0 < t < \frac{\pi}{2}$ において $\frac{dy}{dt} = 0$ を満たす t は, $\sin t = \frac{2}{\pi}$ を満たす。この t を α とする,

すなわち $\sin \alpha = \frac{2}{\pi}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) とすると, x, y の増減表は以下のようになる。

t	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		+	+	+	
x	0	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	1
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	
y	0	$\uparrow$	極大	$\downarrow$	0
(x, y)	(0, 0)	$\nearrow$		$\searrow$	(1, 0)

増減表より, 求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi} t + \cos t - 1 \right) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{2}{\pi} t (\sin t)' + \cos^2 t - \cos t \right\} dt \\ &= \left[\frac{2}{\pi} t \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} - \cos t \right) dt \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2} t + \frac{\sin 2t}{4} - \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{4} - 1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$

(1)

$\overrightarrow{OA}$ は x 軸方向の単位ベクトルであるから、 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ のなす角は 45° であり、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} &= |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

である。同様にして、 $\overrightarrow{OB}$ は z 軸方向の単位ベクトルであるから、 $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OP}$ のなす角は 135° であり、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{4}$$

(2)

$\overrightarrow{OP} = (p_x, p_y, p_z)$ とする。(1)の内積の条件とベクトルの大きさの条件から、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = p_x = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = p_z = -\frac{1}{4} \\ |\overrightarrow{OP}|^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

が成立するから、

$$p_x = \frac{\sqrt{2}}{4}, p_y^2 = \frac{1}{16}, p_z = -\frac{1}{4}$$

が得られる。 $p_y > 0$ より $p_y = \frac{1}{4}$ であり、 $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ と表せるから、 P の座標は

$P\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ である。 Q の座標も同様に考えると、 P の y 座標が負の場合を考えればよい

から、 Q の座標は $Q\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), Q\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

(3)

$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角を θ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) とする。 $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の内積についての条件より、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \\ \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos \theta = \frac{1}{4} \cos \theta \end{cases}$$

が成立するから、 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ である。ここで、 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\theta = 60^\circ$ であり、 $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}| = \frac{1}{2}$

であるから、 $\triangle OPQ$ は1辺の長さが $\frac{1}{2}$ の正三角形である。ここで、 $\triangle OPQ$ の外接円の半径を

R として、 $\triangle OPQ$ に対して正弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}}{\sin 60^\circ} &= 2R \\ \therefore R &= \frac{\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

が得られるから、求める外接円の面積は、

$$\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{\pi}{12}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{12}$$