

(1)

n は 3 で割って 1 余る自然数であるから、自然数 p を用いて $n = 3p - 2$ と表せる。よって、

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (3p - 2)^2 + (3p - 2) + 1 \\ &= 9p^2 - 3p + 3 \\ &= 3(3p^2 - p + 1) \end{aligned}$$

となる。 $3p^2 - p + 1$ は整数であるから、 $n^2 + n + 1$ は 3 の倍数である。

(証明終)

(2)

n を自然数 q を用いて、以下の 3 つの場合に分ける。

[1] $n = 3q$ のとき

n が 3 の倍数となるから、 $n(n+1)(n^2+n+1)$ は 3 の倍数である。

[2] $n = 3q - 1$ のとき

$n+1$ が 3 の倍数となるから、 $n(n+1)(n^2+n+1)$ は 3 の倍数である。

[3] $n = 3q - 2$ のとき

(1) より $n^2 + n + 1$ が 3 の倍数となるから、 $n(n+1)(n^2+n+1)$ は 3 の倍数である。

以上 [1], [2], [3] より、すべての自然数 n に対し、 $n(n+1)(n^2+n+1)$ が 3 の倍数であることが示された。

(証明終)

(3)

n を 0 以上の整数 l と $2 \leq m \leq k+2$ を満たす整数 m を用いて、次のように場合分けをする。

[1] $n = (k+2)l + m$ のとき

このとき、 $0 \leq s \leq k$ を満たす整数 s を用いて $m+s$ と表されるものの中で、必ず $k+2$ の倍数となるものがある。よって、 $n+s$ と表されるものの中でも、必ず $k+2$ の倍数となる

ものがあるから、 $n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(1+n+n^2+\cdots+n^{k+1})$ は $k+2$ の倍数である。

[2] $n = (k+2)l + 1$ のとき

いま、 t を自然数として二項定理より、

$$\begin{aligned} n^t &= \{(k+2)l + 1\}^t \\ &= {}_tC_0 \{(k+2)l\}^t + {}_tC_1 \{(k+2)l\}^{t-1} \cdot 1 + \cdots + {}_tC_{t-1} \{(k+2)l\} \cdot 1^{t-1} + {}_tC_t \cdot 1^t \\ &= \{(k+2)l\}^t + {}_tC_1 \{(k+2)l\}^{t-1} + \cdots + {}_tC_{t-1} \{(k+2)l\} + 1 \end{aligned}$$

であるから、自然数 M_t を用いて $n^t = M_t(k+2) + 1$ と表せる。よって、

$$\begin{aligned} 1 + n + n^2 + \cdots + n^{k+1} &= 1 + \{M_1(k+2) + 1\} + \{M_2(k+2) + 1\} + \cdots + \{M_{k+1}(k+2) + 1\} \\ &= (k+2) + (k+2) \sum_{t=1}^{k+1} M_t \\ &= (k+2) \left(1 + \sum_{t=1}^{k+1} M_t \right) \end{aligned}$$

が成り立ち、 $1 + n + n^2 + \cdots + n^{k+1}$ が $k+2$ の倍数であることがわかる。

以上 [1], [2] より、すべての自然数 n, k に対し、 $1 + n + n^2 + \cdots + n^{k+1}$ が $k+2$ の倍数であることが示された。

(証明終)

2

(1)

$t = \frac{\pi}{4}$ のとき $x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから、求める傾きの値は、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\pi \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - 1$$

である。

(答) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} - 1$

(2)

$\frac{dx}{dt} = \cos t$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \cos t \cdot \frac{2 - \pi \sin t}{\pi \sqrt{1 - \sin^2 t}} \\ &= \frac{\cos t (2 - \pi \sin t)}{\pi |\cos t|} \end{aligned}$$

である。ここで、 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ より $\cos t > 0$ であるから

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\cos t (2 - \pi \sin t)}{\pi \cos t} = \frac{2}{\pi} - \sin t$$

となる。

(答) $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{\pi} - \sin t$

(3)

積分定数を C とすると、 $y(t)$ は

$$\begin{aligned} y(t) &= \int \frac{dy}{dt} dt \\ &= \int \left(\frac{2}{\pi} - \sin t \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} t + \cos t + C \end{aligned}$$

と書ける。ここで、

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + C &= 0 \\ \therefore C &= -1 \end{aligned}$$

となるから、

$$y(t) = \frac{2}{\pi} t + \cos t - 1$$

が得られる。これは $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ も満たす。

(答) $y(t) = \frac{2}{\pi} t + \cos t - 1$

(4)

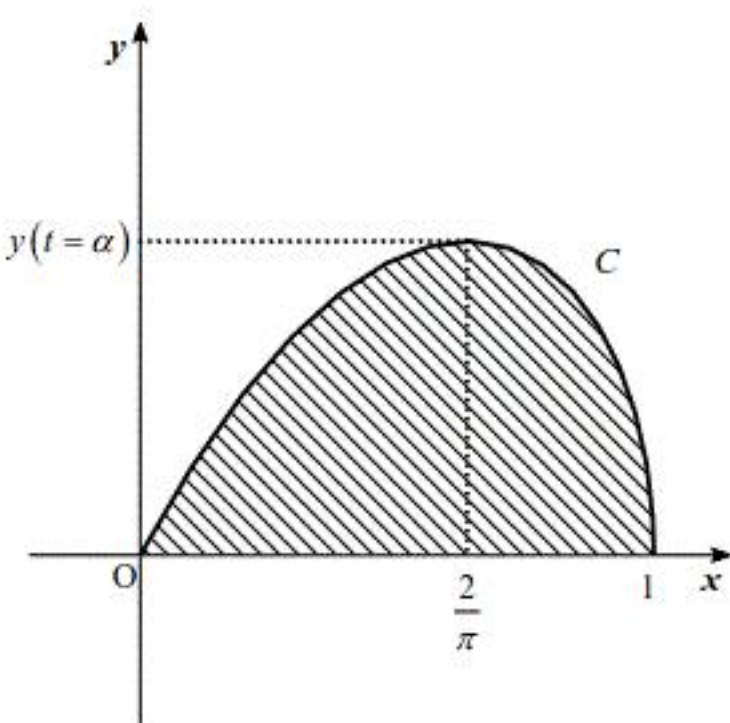
$\frac{dx}{dt} = \cos t$, $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{\pi} - \sin t$ である。また、 $0 < \frac{2}{\pi} < 1$ であるから $\sin t = \frac{2}{\pi}$ を満たす実数 t が存在し、

これを α とおく、すなわち $\sin \alpha = \frac{2}{\pi}$ とする。ただし、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ である。以下に曲線 C ($0 \leq t$

$\leq \frac{\pi}{2}$) の増減表を示す。

t	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	+	+	+	+	0
x	0	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	1
$\frac{dy}{dt}$	+	+	0	-	-
y	$\uparrow$	$\uparrow$	極大	$\downarrow$	$\downarrow$
(x, y)	(0, 0)	$\nearrow$	$\left(\frac{2}{\pi}, y(\alpha)\right)$	$\searrow$	(1, 0)

上表より、求める面積は以下の斜線部となる。



ここで、 x と t は次表のように対応している。

x	0	$\rightarrow$	1
t	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

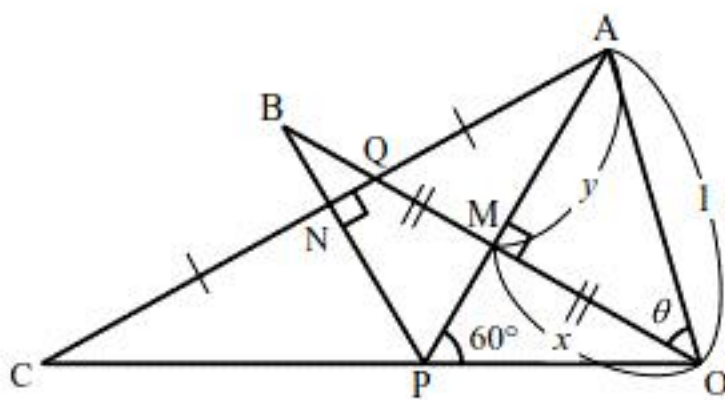
よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^1 y dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi} t + \cos t - 1 \right) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi} t (\sin t)' + \frac{1 + \cos 2t}{2} - \cos t \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[t \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt + \left[\frac{1}{2} t + \frac{\sin 2t}{4} - \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + [\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} \right] + \left(\frac{\pi}{4} + 0 - 1 \right) \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{4} - 1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$

直線 BP と直線 AC の交点を N とする。問題文の条件より、図示すると以下のようになる。



(1)

点 O と点 B が線分 AP に関して対称であるから、AP は $\angle BPO$ の二等分線であり、

$$\angle APB = \angle APO = 60^\circ$$

である。また、点 A と点 C が線分 BP に関して対称であるから、BP は $\angle APC$ の二等分線であり、

$$\angle BPC = \angle BPA = 60^\circ$$

である。以上より、 $\angle OPA + \angle APB + \angle BPC = 180^\circ$ であるから、3 点 O, P, C は一直線上に存在する。

(証明終)

(2)

$\triangle OMP$ に注目すると、

$$\frac{OM}{OP} = \sin 60^\circ$$

$$\therefore OP = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$$

である。同様に、

$$\frac{OM}{MP} = \tan 60^\circ$$

$$\therefore MP = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

であるから、

$$AP = AM + MP = \frac{\sqrt{3}}{3}x + y$$

である。また、 $\angle APN = 60^\circ$, $\angle ANP = 90^\circ$ より $\angle PAN = 30^\circ$ であり、 $\angle AMQ = 90^\circ$ であるから、

$$\frac{MQ}{AM} = \tan 30^\circ$$

$$\therefore MQ = \frac{\sqrt{3}}{3}y$$

である。ここで、点 O と点 B が線分 AP に関して対称であるから、 $BM = OM = x$ であり、

$$BQ = BM - QM = OM - QM = x - \frac{\sqrt{3}}{3}y$$

である。

$$(\text{答}) \quad OP = \frac{2\sqrt{3}}{3}x, AP = \frac{\sqrt{3}}{3}x + y, BQ = x - \frac{\sqrt{3}}{3}y$$

(3)

$\triangle AMO$ に注目すると、 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ である。いま、点 A と点 C が線分 BP に関して対称であるから、 $\triangle APC$ は $AP = CP$ の二等辺三角形である。これより、

$$\begin{aligned} OC &= OP + PC \\ &= OP + AP \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos \theta + \sin \theta \\ &= \sqrt{3}\cos \theta + \sin \theta \\ &= 2\sin(\theta + 60^\circ) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\triangle AMO$ が直角三角形であるから、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ であり $60^\circ < \theta + 60^\circ < 150^\circ$ である。したがって、 $\theta = 30^\circ$ のときに OC は最大となる。

(答) $\theta = 30^\circ$

(1)

大小2つのコインを投げて一致が起こる事象を A 、一致が起こらない事象を B とする。コインの出方は裏か表の2通りであり、これは同様に確からしい。 A が起こる確率は、裏表それぞれ一致する場合が2通りであるから $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ である。また、 B が起こる確率は、その余事象を考えて $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ である。4回コインを投げて連続して一致が起こった回数の最大値が2となるのは、

$$AABA, AABB, BAAB, BBAA, ABAA$$

の5通りである。したがって、求める確率は、

$$p(4, 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p(4, 2) = \frac{5}{16}$$

(2)

$k \geq 2$ のとき、 $2k$ 回コインを投げて連続して一致が起こった回数の最大値が k となるのは、以下の3通りの場合が考えられる。

[1] $1 \sim k$ 回目に A が起こり、 $k+1$ 回目に B が起こったとき

このとき、 $k+2 \sim 2k$ 回目に A, B のどちらが起こるかに関わらず、 $k+2 \sim 2k$ 回目で A が k 回連続して起こることはないから、条件を満たす事象は 2^{k-1} 通り存在する。

[2] k 回目に B が起こり、 $k+1 \sim 2k$ 回目に A が起こったとき

このとき、 $1 \sim k-1$ 回目に A, B のどちらが起こるかに関わらず、 $1 \sim k-1$ 回目で A が k 回連続して起こることはないから、条件を満たす事象は 2^{k-1} 通り存在する。

[3] l 回目に B 、 $l+1 \sim l+k$ 回目に A 、 $l+k+1$ 回目に B が起こったとき ($l=1, 2, \dots, k-1$)

最初の $l-1$ 回と最後の $k-l-1$ 回に A, B のどちらが起こるかに関わらず、 $l+1 \sim l+k$ 回目以外において A が k 回連続して起こることはない。したがって、 A, B のどちらが起こってもよいのは $k-2$ 回あり、これが $l=1, 2, \dots, k-1$ のすべての場合に成り立つから、条件を満たす事象は $(k-1)2^{k-2}$ 通り存在する。

以上[1], [2], [3]より、 $k \geq 2$ のとき求める確率は

$$p(2k, k) = \frac{2^{k-1} + 2^{k-1} + (k-1)2^{k-2}}{2^{2k}} = (k+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。一方、 $k=1$ のとき、

$$p(2, 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

であるから、①はすべての自然数 k に対して成り立つ。

$$(\text{答}) \quad p(2k, k) = (k+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}$$

(3)

$S_n = \sum_{k=1}^n p(2k, k)$ とおくと、(2)より

$$S_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + (n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + (n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ここで、

$$\frac{1}{2}S_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots + (n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + (n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから、①-②より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+3} - (n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} - (n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \\ &= \frac{5}{8} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - (n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \\ \therefore S_n &= \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} p(2k, k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{5}{4} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - (n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \right\} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^{\infty} p(2k, k) = \frac{5}{4}$$