

(1)

x についての2次方程式 $x^2 + (a+1)x + (a^2-1) = 0$ の判別式を D_1 とすると、この方程式が実数

解をもつとき $D_1 \geq 0$ となるから、求める a の範囲は

$$D_1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 - 4(a^2-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3a^2 + 2a + 5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3a-5)(a+1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq \frac{5}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -1 \leq a \leq \frac{5}{3}$$

(2)

$x^2 + (a+1)x + (a^2-1) = 0$ が実数解をもつとき、つまり $-1 \leq a \leq \frac{5}{3}$ を満たす全ての a に対して、

x についての2次方程式 $x^2 + ax + (ab-1) = 0$ が実数解をもつための b の範囲を求めればよい。

$x^2 + ax + (ab-1) = 0$ の判別式を D_2 とすると、

$$\begin{aligned} D_2 &= a^2 - 4(ab-1) \\ &= a^2 - 4ab + 4 \end{aligned}$$

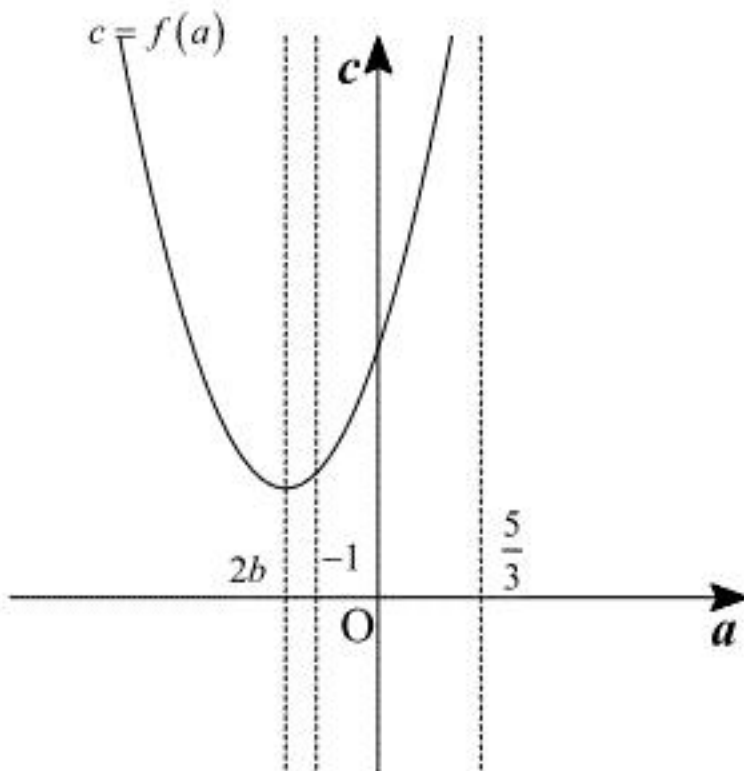
となり、 $-1 \leq a \leq \frac{5}{3}$ において $a^2 - 4ab + 4 \geq 0$ となればよい。 $f(a) = a^2 - 4ab + 4$ とおくと、

$$f(a) = (a-2b)^2 + 4 - b^2$$

より、軸は $a = 2b$ となる。 b の範囲で場合分けして考えると、

[1] $2b < -1 \Leftrightarrow b < -\frac{1}{2}$ のとき

このとき、 ac 平面に $c = f(a)$ を図示すると、以下の様になればよい。



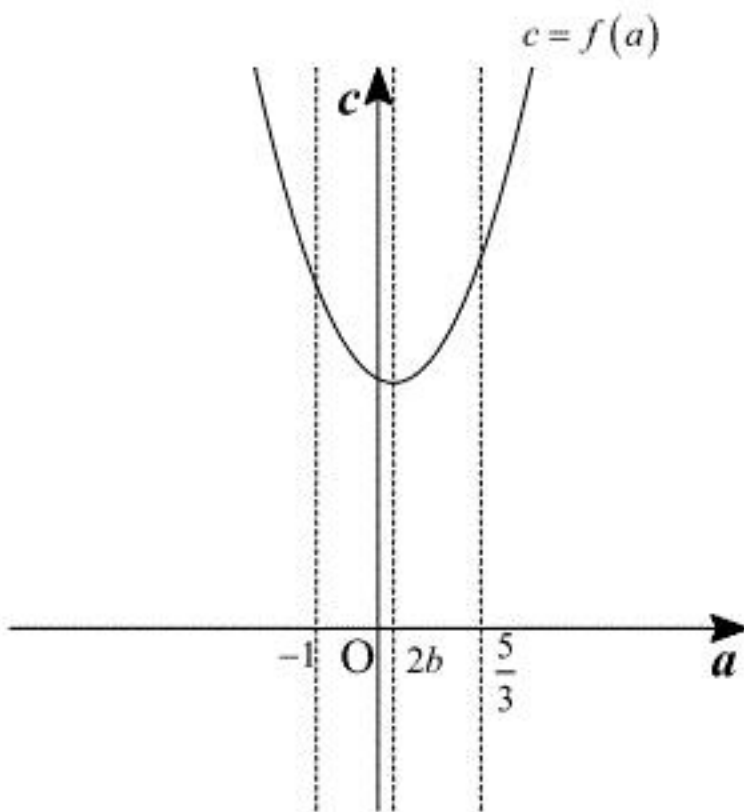
このとき、 $-1 \leq a \leq \frac{5}{3}$ の範囲内では、 $f(-1) = 5 + 4b$ が最小となるため、

$$5 + 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \geq -\frac{5}{4}$$

となればよい。 $b < -\frac{1}{2}$ との共通範囲を考えると、 $-\frac{5}{4} \leq b < -\frac{1}{2}$ を得る。

[2] $-1 \leq 2b < \frac{5}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq b < \frac{5}{6}$ のとき

このとき、 ac 平面に $c = f(a)$ を図示すると、以下の様になればよい。



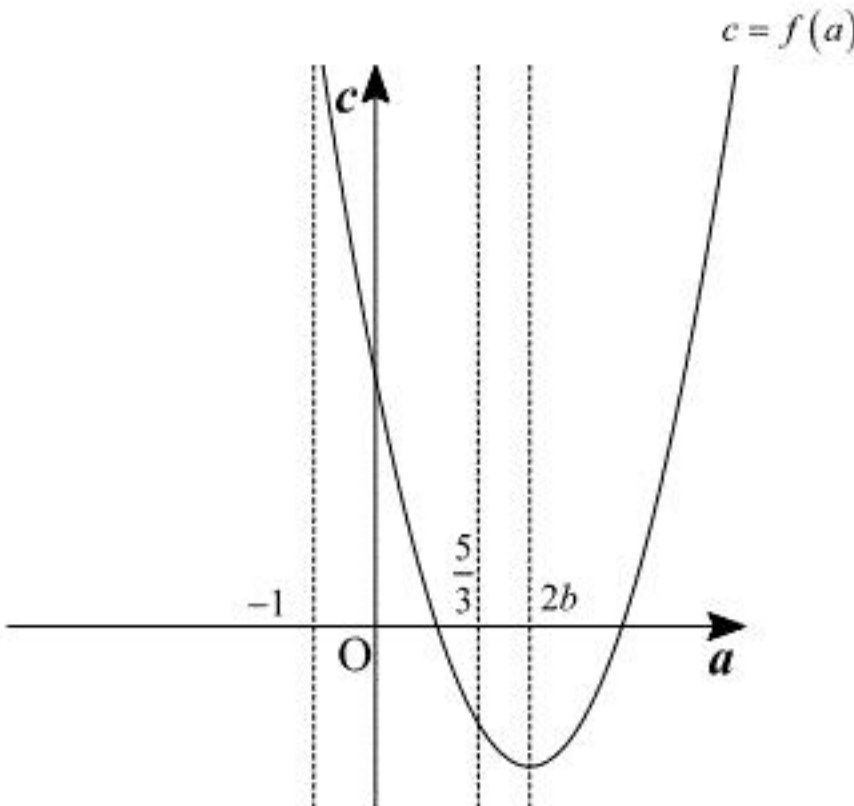
このとき、 $-1 \leq a \leq \frac{5}{3}$ の範囲内では、 $f(2b) = 4 - b^2$ が最小となるため、

$$4 - b^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq b \leq 2$$

となればよい。 $-\frac{1}{2} \leq b < \frac{5}{6}$ との共通範囲を考えると、 $-\frac{1}{2} \leq b < \frac{5}{6}$ を得る。

[3] $2b \geq \frac{5}{3} \Leftrightarrow b \geq \frac{5}{6}$ のとき

このとき、 ac 平面に $c = f(a)$ を図示すると、以下の様になればよい。



このとき、 $-1 \leq a \leq \frac{5}{3}$ の範囲内では、 $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{61}{9} - \frac{20}{3}b$ が最小となるため、

$$\frac{61}{9} - \frac{20}{3}b \geq 0 \Leftrightarrow b \leq \frac{61}{60}$$

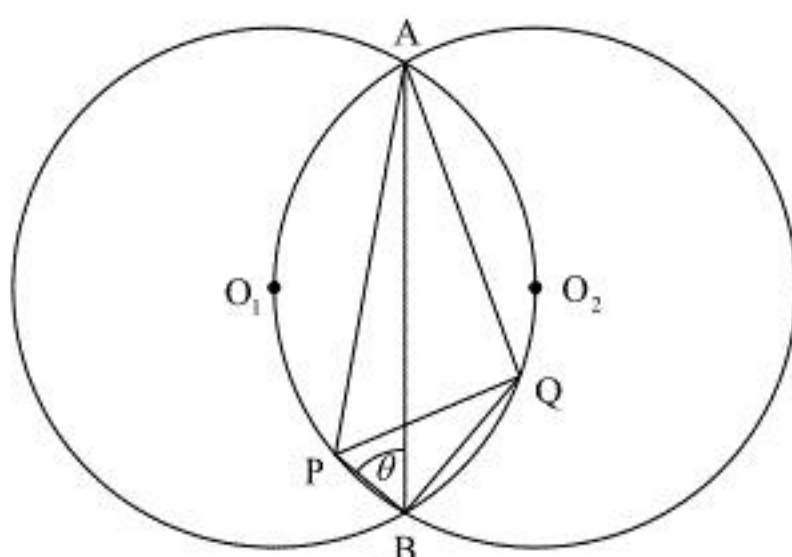
となればよい。 $b \geq \frac{5}{6}$ との共通範囲を考えると、 $\frac{5}{6} \leq b \leq \frac{61}{60}$ を得る。

以上、[1], [2], [3]より、求める b の範囲は $-\frac{5}{4} \leq b \leq \frac{61}{60}$ となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{5}{4} \leq b \leq \frac{61}{60}$$

(1)

問題の図は以下のようになる。



円 C_1, C_2 の半径が等しいことから, $\triangle AO_1O_2, \triangle BO_1O_2$ は正三角形である。よって, $\angle AO_2B$ の大きさは,

$$\begin{aligned}\angle AO_2B &= \angle AO_2O_1 + \angle BO_2O_1 \\ &= 120^\circ\end{aligned}$$

となる。円 C_1 の弧 AB に対して円周角の定理から,

$$\angle AQB = \angle AO_2B = 120^\circ$$

となる。また, 対称性から同様の議論により,

$$\angle APB = \angle AO_1B = 120^\circ$$

となる。したがって, $\angle APB = \angle AQB = 120^\circ$ が示された。

(証明終)

$\angle ABQ$ の大きさは, 四角形 $APBQ$ において, $\angle APB = \angle AQB = 120^\circ$, $\angle PAQ = 30^\circ$, $\angle ABP = \theta$ であるから,

$$\begin{aligned}\angle ABQ &= 360^\circ - \angle APB - \angle AQB - \angle PAQ - \angle ABP \\ &= 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ - 30^\circ - \theta \\ &= 90^\circ - \theta\end{aligned}$$

となる。

(答) $\angle ABQ = 90^\circ - \theta$

(2)

$\triangle AO_1O_2$ は1辺の長さが1の正三角形であるから,

$$AO_1 = 1, \angle AO_1O_2 = 60^\circ$$

である。また,

$$\triangle AO_1O_2 \equiv \triangle BO_1O_2$$

より対称性に注意すると,

$$\begin{aligned}AB &= 2AO_1 \sin 60^\circ \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $AB = \sqrt{3}$

(3)

$\triangle ABP$ とその外接円 C_2 に関して, 正弦定理から,

$$\begin{aligned}\frac{AP}{\sin \angle ABP} &= 2 \cdot 1 \\ \therefore AP &= 2 \sin \theta\end{aligned}$$

を得る。 $\triangle ABQ$ とその外接円 C_1 に関して, 正弦定理から,

$$\begin{aligned}\frac{AQ}{\sin \angle ABQ} &= 2 \cdot 1 \\ \therefore AQ &= 2 \sin(90^\circ - \theta) \\ &= 2 \cos \theta\end{aligned}$$

を得る。

(答) $AP = 2 \sin \theta, AQ = 2 \cos \theta$

(4)

点 P が O_1 から B まで動くとき, $AP = 2 \sin \theta$ の範囲は $1 \leq AP < \sqrt{3}$ となる。したがって θ の範囲は, $30^\circ \leq \theta < 60^\circ$ である。 $\triangle APQ$ の面積 S を求めると,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \theta \cdot 2 \cos \theta \cdot \sin \angle PAQ \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta \sin 30^\circ \\ &= \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta\end{aligned}$$

となる。

$$30^\circ \leq \theta < 60^\circ \Leftrightarrow 60^\circ \leq 2\theta < 120^\circ$$

の範囲で, $\frac{1}{2} \sin 2\theta$ は $2\theta = 90^\circ \Leftrightarrow \theta = 45^\circ$ のときに最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

(答) $\frac{1}{2}$

(1)

 I_1 を求めると,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 (x-a)(x-b) dx \\
 &= \int_0^1 \{x^2 - (a+b)x + ab\} dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a+b}{2}x^2 + abx \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{a+b}{2} + ab
 \end{aligned}$$

を得る。また、 $f(x) = (x-a)(x-b)$ より、 $f'(x) = 2x - (a+b)$ であるから、 I_2 を求めると、

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^1 \{2x - (a+b)\}^2 dx \\
 &= \int_0^1 \{4x^2 - 4(a+b)x + (a+b)^2\} dx \\
 &= \left[\frac{4x^3}{3} - 2(a+b)x^2 + (a+b)^2 x \right]_0^1 \\
 &= \frac{4}{3} - 2(a+b) + (a+b)^2
 \end{aligned}$$

を得る。したがって、 $I_2 - 4I_1$ は、

$$\begin{aligned}
 I_2 - 4I_1 &= \frac{4}{3} - 2(a+b) + (a+b)^2 - 4\left\{\frac{1}{3} - \frac{a+b}{2} + ab\right\} \\
 &= \frac{4}{3} - 2(a+b) + (a+b)^2 - \frac{4}{3} + 2(a+b) - 4ab \\
 &= (a+b)^2 - 4ab \\
 &= (a-b)^2 \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $4I_1 \leq I_2$ は示された。

(証明終)

(2)

 $I_2 = \frac{4}{3} - 2(a+b) + (a+b)^2$ より、 $a+b=t$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 I_2 &= t^2 - 2t + \frac{4}{3} \\
 &= (t-1)^2 + \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

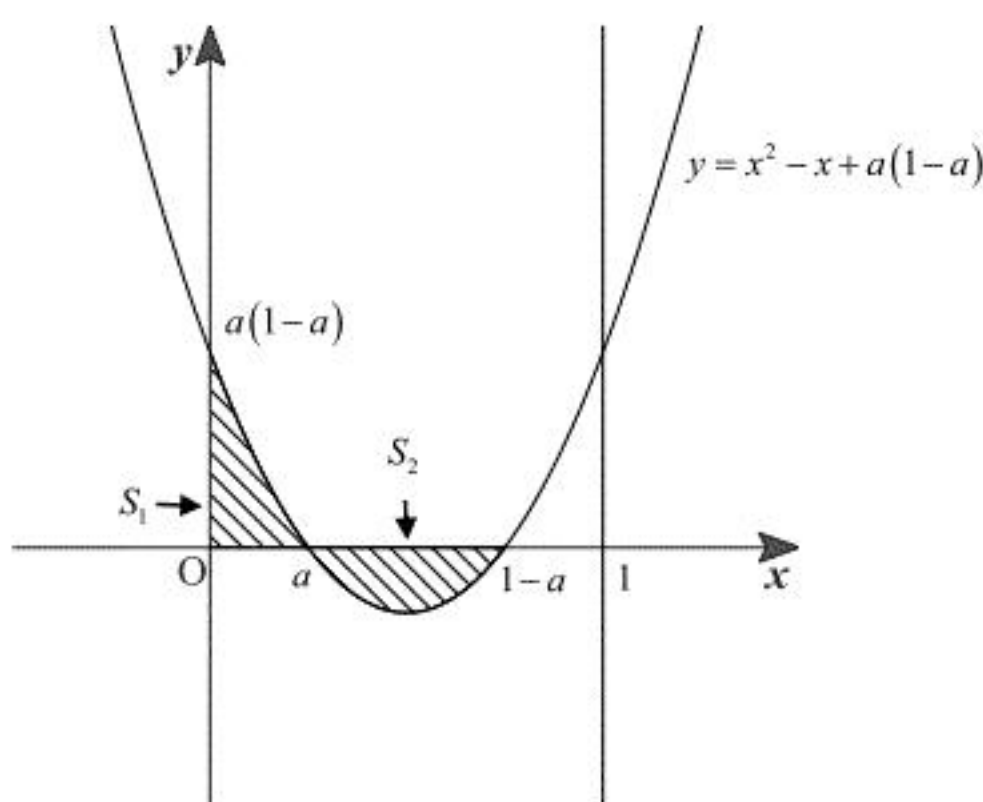
となる。よって、 $t = a+b=1$ のとき I_2 は最小値 $\frac{1}{3}$ をとる。(答) 最小値: $\frac{1}{3}$, 条件: $a+b=1$

(3)

 $a+b=1 \Leftrightarrow b=1-a$ より、

$$\begin{aligned}
 0 &< a < b \\
 &\Leftrightarrow 0 < a < 1-a \\
 &\Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となる。このとき、グラフは下図のようになる。

 S_1 を求めると、

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_0^a \{x^2 - x + a(1-a)\} dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + a(1-a)x \right]_0^a \\
 &= \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} + a^2(1-a) \\
 &= -\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2
 \end{aligned}$$

となる。また、 S_2 を求めると、

$$\begin{aligned}
 S_2 &= -\int_a^{1-a} \{x^2 - x + a(1-a)\} dx \\
 &= -\int_a^{1-a} (x-a)\{x-(1-a)\} dx \\
 &= \frac{1}{6}\{(1-a)-a\}^3 \\
 &= \frac{1}{6}(1-2a)^3 \\
 &= -\frac{4}{3}a^3 + 2a^2 - a + \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

となる。 $S_1 = S_2$ となるとき

$$\begin{aligned}
 -\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 &= -\frac{4}{3}a^3 + 2a^2 - a + \frac{1}{6} \\
 \Leftrightarrow \frac{2}{3}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + a - \frac{1}{6} &= 0 \\
 \Leftrightarrow 4a^3 - 9a^2 + 6a - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (a-1)(4a^2 - 5a + 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (a-1)^2(4a-1) &= 0 \\
 \therefore a = \frac{1}{4} \left(\because 0 < a < \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

である。また、このとき、 $b = \frac{3}{4}$ となる。(答) $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$