

(1)

求める無限級数は、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

と表される。部分分数分解をして整理すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

p を 2 以上の偶数とすると、

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{-1}{(p+4)(p+6)} \\ a_{p+1} &= \frac{1}{(p+1+3)(p+1+5)} \\ &= \frac{1}{(p+4)(p+6)} \end{aligned}$$

となる。よって、 $a_p + a_{p+1} = 0$ である。これを用いると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} a_k &= a_1 + \sum_{k=2}^{2n-1} a_k + a_{2n} \\ &= \frac{1}{4 \cdot 6} + 0 - \frac{1}{(2n+4)(2n+6)} \\ &= \frac{1}{24} - \frac{1}{(2n+4)(2n+6)} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} a_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{24} - \frac{1}{(2n+4)(2n+6)} \right\} \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

である。次に、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n+1} a_k &= a_1 + \sum_{k=2}^{2n+1} a_k \\ &= \frac{1}{4 \cdot 6} + 0 \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n+1} a_k = \frac{1}{24}$$

となる。以上より、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{24}$ である。

(答) $\frac{1}{24}$

2

(1)

$$\int_a^x f(t) dt = (\log x)^2 - 2 \log x - 8$$

より、両辺を微分すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(\log x) \cdot \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \\ &= \frac{2(\log x - 1)}{x} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2(\log x - 1)}{x}$

(2)

与式に $x = a$ を代入すると

$$\begin{aligned} \int_a^a f(t) dt &= (\log a)^2 - 2 \log a - 8 \\ \Leftrightarrow (\log a - 4)(\log a + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log a &= -2, 4 \\ \therefore a &= e^{-2}, e^4 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = e^{-2}, e^4$

(3)

$$g(x) = \sqrt{x} - \log x \quad (x > 0) \text{ とする。}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 2}{2x} \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

より、 $g(x)$ の増減は下表のようになる。

x	(0)	...	4	...
$g'(x)$	↘	-	0	+
$g(x)$	↘	↘	$g(4)$	↗

$$\begin{aligned} \text{よって、} g(x) \text{ は } x = 4 \text{ で最小となる。ゆえに、} x > 0 \text{ において、} \\ g(x) &\geq g(4) = 2 - \log 4 = 2(1 - \log 2) = 2(\log e - \log 2) > 0 \\ \therefore \log x &< \sqrt{x} \end{aligned}$$

である。また、 $x > 1$ において

$$\log x > 0$$

であるから、

$$\begin{aligned} 0 &< \log x < \sqrt{x} \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{\log x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

となるため、はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0 \quad \left(\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \right)$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(\log x - 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} \right) \\ &= 2(0 - 0) = 0 \end{aligned}$$

となる。

(答) 0

(4)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\log x - 1) \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{2(2 - \log x)}{x^2} \\ f''(x) &= 2 \cdot \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot x^2 - (2 - \log x) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{2(2 \log x - 5)}{x^3} \end{aligned}$$

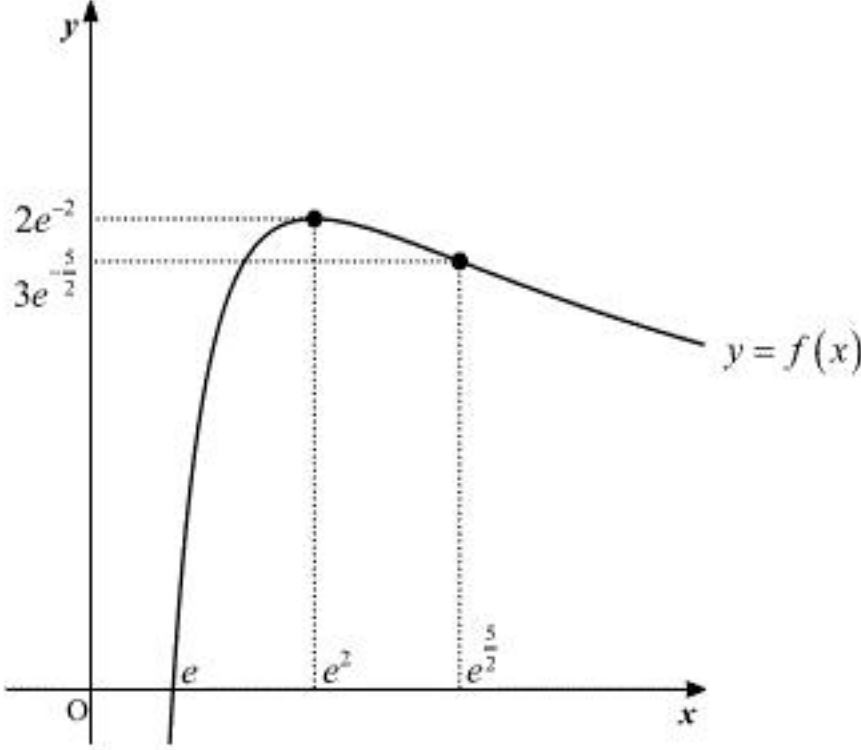
となるため、 $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	0	...	e^2	...	$e^{\frac{5}{2}}$	...
$f'(x)$	↘	+	0	-		-
$f''(x)$	↘	-		-	0	+
$f(x)$	↘	↗	$f(e^2)$	↘	$f\left(e^{\frac{5}{2}}\right)$	↘

$$f(x) \text{ は } x = e^2 \text{ で極大値 } f(e^2) = \frac{2}{e^2} \text{ をとり、} f\left(e^{\frac{5}{2}}\right) = 3e^{-\frac{5}{2}} \text{ より } \left(e^{\frac{5}{2}}, 3e^{-\frac{5}{2}}\right) \text{ に変曲点をもつ。また、}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad (\because (3))$$

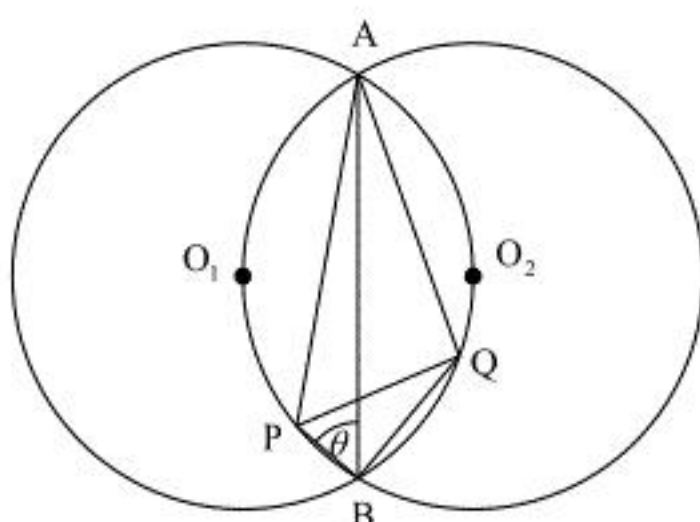
であるため、 $y = f(x)$ は下図のようになる。



(答) 前図

(1)

問題の図は以下のようになる。



円 C_1, C_2 の半径が等しいことから, $\triangle AO_1O_2, \triangle BO_1O_2$ は正三角形である。よって, $\angle AO_2B$ の大きさは,

$$\begin{aligned}\angle AO_2B &= \angle AO_2O_1 + \angle BO_2O_1 \\ &= 120^\circ\end{aligned}$$

となる。円 C_1 の弧 AB に対して円周角の定理から,

$$\angle AQB = \angle AO_2B = 120^\circ$$

となる。また, 対称性から同様の議論により,

$$\angle APB = \angle AO_1B = 120^\circ$$

となる。したがって, $\angle APB = \angle AQB = 120^\circ$ が示された。

(証明終)

$\angle ABQ$ の大きさは, 四角形 $APBQ$ において, $\angle APB = \angle AQB = 120^\circ$, $\angle PAQ = 30^\circ$, $\angle ABP = \theta$ であるから,

$$\begin{aligned}\angle ABQ &= 360^\circ - \angle APB - \angle AQB - \angle PAQ - \angle ABP \\ &= 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ - 30^\circ - \theta \\ &= 90^\circ - \theta\end{aligned}$$

となる。

(答) $\angle ABQ = 90^\circ - \theta$

(2)

$\triangle AO_1O_2$ は1辺の長さが1の正三角形であるから,

$$AO_1 = 1, \angle AO_1O_2 = 60^\circ$$

である。また,

$$\triangle AO_1O_2 \equiv \triangle BO_1O_2$$

より対称性に注意すると,

$$\begin{aligned}AB &= 2AO_1 \sin 60^\circ \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $AB = \sqrt{3}$

(3)

$\triangle ABP$ とその外接円 C_2 に関して, 正弦定理から,

$$\begin{aligned}\frac{AP}{\sin \angle ABP} &= 2 \cdot 1 \\ \therefore AP &= 2 \sin \theta\end{aligned}$$

を得る。 $\triangle ABQ$ とその外接円 C_1 に関して, 正弦定理から,

$$\begin{aligned}\frac{AQ}{\sin \angle ABQ} &= 2 \cdot 1 \\ \therefore AQ &= 2 \sin (90^\circ - \theta) \\ &= 2 \cos \theta\end{aligned}$$

を得る。

(答) $AP = 2 \sin \theta, AQ = 2 \cos \theta$

(4)

点 P が O_1 から B まで動くとき, $\angle O_1AB = 30^\circ$ であるから, $0^\circ < \angle PAB < 30^\circ$ となる。

$$\angle PBA = \theta = 180^\circ - \angle APB - \angle PAB = 60^\circ - \angle PAB$$

であるので, $30^\circ < \theta < 60^\circ$ を得る。 $\triangle APQ$ の面積 S を求めると,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \theta \cdot 2 \cos \theta \cdot \sin \angle PAQ \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta \sin 30^\circ \\ &= \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta\end{aligned}$$

となる。

$$30^\circ < \theta < 60^\circ \Leftrightarrow 60^\circ < 2\theta < 120^\circ$$

の範囲で, $\frac{1}{2} \sin 2\theta$ は $2\theta = 90^\circ \Leftrightarrow \theta = 45^\circ$ のときに最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

(答) $\frac{1}{2}$