

(1)

$\triangle ABC$ の成立条件より

$$a < b + c < b + b = 2b$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{2} < b^2 \quad (\because b > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{ab}{2}} < b \quad \left(\because \frac{ab}{2} > 0 \right)$$

となる。

(証明終)

(2)

正弦定理より $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$ であるから、倍角の公式、加法定理を用いると

$$c(1 - \cos B) - b(1 - \cos C)$$

$$= 2R \sin C \cdot 2 \sin^2 \frac{B}{2} - 2R \sin B \cdot 2 \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$= 2R \left(2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{B}{2} - 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{C}{2} \right)$$

$$= 8R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \left(\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)$$

$$= 8R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sin \frac{B-C}{2}$$

となる。

(証明終)

(3)

$AM = x$, $AN = y$ とする。与条件より、三角形の面積について

$$\triangle AMN = \frac{1}{2} \triangle ABC$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} xy \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\Leftrightarrow xy = \frac{1}{2} bc$$

が成り立つ。よって、この結果と $\triangle AMN$ における余弦定理、及び相加平均と相乗平均の関係より

$$MN^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A \geq 2\sqrt{x^2 y^2} - 2xy \cos A = 2xy(1 - \cos A) = bc(1 - \cos A)$$

$$\therefore MN^2 \geq bc(1 - \cos A) \quad (\because x > 0, y > 0)$$

となる。 $(x = y = \sqrt{\frac{bc}{2}} \text{ のときにのみ等号が成立する})$

(証明終)

(4)

$\triangle ABC$ に余弦定理を用いることで、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\Leftrightarrow bc(1 - \cos A) = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2}$$

となる。P, Q を辺 AB, BC 上や BC, CA 上にとった場合も(3)と同様に考えると、求める最小値は

$$\sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2 - (c - a)^2}{2}}, \sqrt{\frac{c^2 - (a - b)^2}{2}}$$

のいずれかである。ここで、 $a > b > c$ 、及び三角形の2辺の長さの和が他の1辺の長さより大きいことから

$$\{a^2 - (b - c)^2\} - \{c^2 - (a - b)^2\} = 2(a - c)(a + c - b) > 0$$

$$\{b^2 - (c - a)^2\} - \{c^2 - (a - b)^2\} = 2(b - c)(b + c - a) > 0$$

であるため、求める最小値は

$$\sqrt{\frac{c^2 - (a - b)^2}{2}} = \sqrt{\frac{(c - a + b)(c + a - b)}{2}}$$

である。

$$(\text{答}) \sqrt{\frac{(c - a + b)(c + a - b)}{2}}$$

(1)

千の位は1, 2, 9のいずれかであり, ほかの位は0, 1, 2, 9のいずれかである。よって, 求める値は

$$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$$

である。

(答) 192

(2)

1500以下となる正の整数の個数を考える。それは, 千の位が0となる整数のうち0以外の整数または千の位が1, 百の位が0, 1, 2となる整数の合計数に等しい。その値は

$$1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 - 1 + 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 64 - 1 + 48 = 111$$

である。よって, 求める値は

$$111 + 1 = 112$$

である。

(答) 112 番目

(3)

$$x^2 + 2ax + b = 2cx + d$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(a-c)x + (b-d) = 0$$

となることより, 題意を満たす条件はこの2次方程式の判別式 D が $D \geq 0$ となることである。題意を満たさない条件を考えると

$$\frac{D}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2 - (b-d) < 0$$

$$\Leftrightarrow b-d > (a-c)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで,

$$b-d \leq 0$$

$$\Leftrightarrow b \leq d$$

となるときは,

$$(a-c)^2 \geq 0 \text{ より常に } \textcircled{1} \text{ は不成立である} \quad \cdots \textcircled{2}$$

ので, $b > d$ のときで $\textcircled{1}$ が成立する場合を考える。

$$b > d$$

$$\Leftrightarrow (b, d) = (1, 0), (2, 0), (2, 1), (9, 0), (9, 1), (9, 2)$$

となる。

[1] $(b, d) = (1, 0), (2, 1)$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow (a-c)^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow (a, c) = (0, 0), (1, 1), (2, 2), (9, 9)$$

となる。

[2] $(b, d) = (2, 0)$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow (a-c)^2 < 2$$

$$\Leftrightarrow (a, c) = (0, 0), (1, 1), (2, 2), (9, 9), (0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1)$$

となる。

[3] $(b, d) = (9, 0), (9, 1), (9, 2)$ のとき

同様に

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow (a, c) = (0, 0), (1, 1), (2, 2), (9, 9), (0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (0, 2), (2, 0)$$

となる。

[1]~[3]と $\textcircled{2}$ より, 題意を満たさない (a, b, c, d) の組み合わせは

$$2 \cdot 4 + 8 + 3 \cdot 10 = 46 \text{ (通り)}$$

である。また, (a, b, c, d) の組み合わせは

$$4^4 = 256 \text{ (通り)}$$

であるので, 求める組み合わせ数は

$$256 - 46 = 210 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 210 通り

3

(1)

与式より,

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \alpha b_{n+1} &= a_n + \frac{b_n}{4} + \alpha(a_n + b_n) \\ &= (1 + \alpha)a_n + \left(\frac{1}{4} + \alpha\right)b_n \\ &= (1 + \alpha)\left(a_n + \frac{\frac{1}{4} + \alpha}{1 + \alpha}b_n\right) \end{aligned}$$

となる。これを $a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$ と比較すると

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \alpha = \frac{\frac{1}{4} + \alpha}{1 + \alpha} \\ \beta = 1 + \alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{4} \\ \beta = 1 + \alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。よって求める答えは

$$\begin{cases} (\alpha_1, \beta_1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ (\alpha_2, \beta_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

である。

(答) $(\alpha_1, \beta_1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (\alpha_2, \beta_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(2)

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \alpha_1 b_{n+1} &= \beta_1(a_n + \alpha_1 b_n) \\ \therefore a_n + \alpha_1 b_n &= \beta_1^{n-1}(a_1 + \alpha_1 b_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となるため、求める答えは

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である。

(答) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3)

(2)と同様に計算すると

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \alpha_2 b_{n+1} &= \beta_2(a_n + \alpha_2 b_n) \\ \therefore a_n + \alpha_2 b_n &= \beta_2^{n-1}(a_1 + \alpha_2 b_1) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。①、②より,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a_n - \frac{1}{2}b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ a_n + \frac{1}{2}b_n = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ b_n = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n, b_n = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(4)

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{OA}} = \left(1, -\frac{1}{2}\right) \\ \overrightarrow{\text{OC}_n} = (a_n, b_n) \end{cases}$$

であるので,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OC}_n} &= a_n - \frac{1}{2}b_n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (\because \textcircled{2}) \end{aligned}$$

となる。よって求める答えは

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OC}_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

である。

(答) 2

4

(1)

与式の両辺を微分すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(\log x) \cdot \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \\ &= \frac{2(\log x - 1)}{x} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2(\log x - 1)}{x}$

(2)

与式に $x = a$ を代入すると

$$\begin{aligned} \int_a^0 f(t) dt &= (\log a)^2 - 2 \log a - 8 \\ \Leftrightarrow (\log a - 4)(\log a + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log a &= -2, 4 \\ \therefore a &= e^{-2}, e^4 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = e^{-2}, e^4$

(3)

$g(x) = \sqrt{x} - \log x$ ($x > 0$) とする。

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 2}{2x} \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

より、 $g(x)$ の増減は下表のようになる。

x	(0)	...	4	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$			$g(4)$	

よって、 $g(x)$ は $x = 4$ で最小となる。ゆえに

$$\begin{aligned} g(x) &\geq g(4) = 2 - \log 4 = 2(1 - \log 2) = 2(\log e - \log 2) > 0 \\ \therefore \log x &< \sqrt{x} \end{aligned}$$

である。ゆえに十分大きい x においては

$$\begin{aligned} 0 &< \log x < \sqrt{x} \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{\log x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

となるため、はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0 \quad \left(\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \right)$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(\log x - 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} \right) \\ &= 2(0 - 0) = 0 \end{aligned}$$

となる。

(答) 0

(4)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\log x - 1) \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{2(2 - \log x)}{x^2} \\ f''(x) &= 2 \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (2 - \log x) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{2(2 \log x - 5)}{x^3} \end{aligned}$$

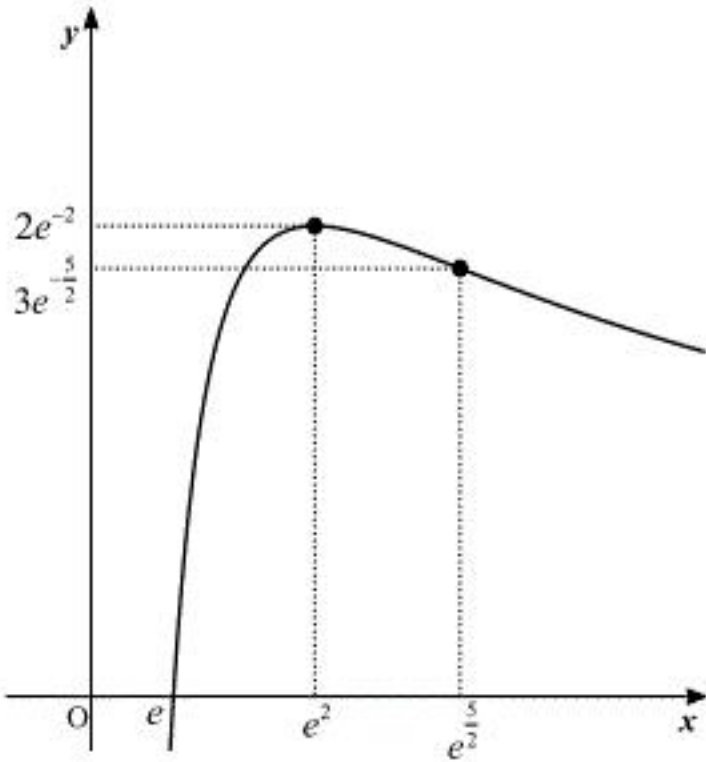
となるため、 $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	0	...	e^2	...	$e^{\frac{5}{2}}$	...
$f'(x)$		+	0	-		-
$f''(x)$		-		-	0	+
$f(x)$			$f(e^2)$		$f\left(e^{\frac{5}{2}}\right)$	

$f(x)$ は $x = e^2$ で極大値 $f(e^2) = \frac{2}{e^2}$ をとり、 $f\left(e^{\frac{5}{2}}\right) = 3e^{-\frac{5}{2}}$ より $\left(e^{\frac{5}{2}}, 3e^{-\frac{5}{2}}\right)$ に変曲点をもつ。また、

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad (\because (3))$$

であるため、 $y = f(x)$ は下図のようになる。



(答) 前図