

信州大学理学部 数理・自然情報科学科

平成9年度 前期入学試験問題

数 学

注意事項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまでは、開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子とは別になっている。解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。
3. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。決して氏名を書いてはいけない。
4. 合計6題を解答すること。
5. 問題群 **4**, **5**, **6** の問題は選択問題である。これについて以下に注意を述べる。
 - (1) 各問題群よりそれぞれ1題ずつ選択して解答すること。
 - (2) 解答用紙の解答番号マーク欄にある番号の中から選択した問題番号を○で囲むこと。
 - (3) 選択した問題以外の問題を解答しても、その答案は採点されない。
 - (4) 各群において、2題以上の問題を選択し解答した場合、その問題群の答案は無効となり、採点はなされない。
6. この問題冊子は持ち帰ること。

□1 得点が1点, 0点, -1点の3通りに得られるゲームがある。得点が1, 0, -1である確率はそれぞれ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ とする。今, n を2以上の与えられた自然数とする。このゲームを何回か行い, 1回目からの合計得点が最初に n 点または $-n$ 点に達したときゲームをやめることにする。 k 回目でゲームをやめる確率を $P(k)$ としたとき, $k = n, n+1, n+2$ についてそれぞれ $P(k)$ を求めよ。

〔2〕 同じ品質のガラス板がたくさんある。このガラス板を10枚重ねて光を通過させたとき、光の強さがはじめの $\frac{2}{5}$ 倍になった。通過した光の強さをはじめの $\frac{1}{8}$ 倍以下にするには、このガラス板を何枚以上重ねればよいか。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 5 = 0.6990$ とする。

〔3〕 関数 $f(x) = x \log x$ ($x > 0$) および定数 t ($t > 1$) が与えられている。曲線 $y = f(x)$ とその上の点 $(t, f(t))$ における接線および直線 $x = 1$ によって囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ とする。直線 $x = 1$ と直線 $x = t$ の間であって、曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = t$ によって囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、必要ならば不等式 $\log x < \sqrt{x}$ ($x > 0$) を用いてもよい。

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減およびグラフの凹凸を調べて、そのグラフの概形を描け。

(2) $S_1(t)$ および $S_2(t)$ を求めよ。

(3) 極限值 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_1(t) \log t}{S_2(t)}$ を求めよ。

4 次の 4-1, 4-2, 4-3 の3題から1題を選び解答せよ。

4-1 次の問いに答えよ。

(1) $p+q=4$, $pq=3$, $r+s=1$, $rs=-2$ のとき $(pr+qs)^3+(ps+rq)^3$ の値を求めよ。

(2) x の整式 x^3+3x^2+ax+a が x^2+bx+1 で割り切れるように定数 a, b の値を定めよ。

4-2 $\triangle ABC$ とその内部の点 P に対し、直線 AP と直線 BC との交点を D とし、直線 BP と直線 AC との交点を E とする。点 D が線分 BC を $1:2$ に内分し、 $\frac{\triangle ABC}{\triangle ABP} = \frac{11}{3}$ であるとき、 $\frac{CE}{EA}$ の値を求めよ。

4-3 初項から第 n 項 ($n \geq 1$) までの和 S_n が n に関する3次の整式

$$S_n = n^3 + pn^2 + qn + r$$

で与えられる数列 $\{a_n\}$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ が等差数列になるための定数 p, q, r に関する条件を求め、また、そのときの等差数列 $\{b_n\}$ の初項と公差を求めよ。

5 次の 5-1, 5-2, 5-3, 5-4 の4題から1題を選び解答せよ。

5-1 空間内に点 A_n ($n = 1, 2, \dots, 5$) が与えられている。点 Q は $\sum_{n=1}^5 \overrightarrow{QA_n} = \vec{0}$ を満たすものとする。このとき任意の点 P に対して次の等式が成り立つことを示せ。

$$(1) 5\overrightarrow{PQ} = \sum_{n=1}^5 \overrightarrow{PA_n}$$

$$(2) 5|\overrightarrow{PQ}|^2 = \sum_{n=1}^5 |\overrightarrow{PA_n}|^2 - \sum_{n=1}^5 |\overrightarrow{QA_n}|^2$$

5-2 a, b, c を実数とする。方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の3つの解 α, β, γ が次の条件を満たすものとする。また、以下において i は虚数単位とする。

(1) α は実数で、 β, γ は実数でない

$$(2) |\alpha - 1 + 4i| = |\beta - 1 + 4i| = 5$$

このとき $|\alpha\beta\gamma|$ が最大となるような c の値を求めよ。

5-3 5個の銅貨 C_k ($k = 1, 2, \dots, 5$) を同時に投げる。確率変数 X_k は、銅貨 C_k の表が出たら $X_k = 1$ 、裏が出たら $X_k = -1$ と定めるものとする。

このとき、確率変数 $Y = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)^2$ の平均値と分散を求めよ。

5-4 10進法で表された10桁の自然数をランダムに選び、その自然数の各桁の数字を並べ替えてできる10桁の自然数のうち最大の数と最小の数を画面に出力するプログラムをBASIC言語で書け。