

平成 9 年度 入学試験問題

数 学

(数学Ⅰ, 数学Ⅱ, 数学A, 数学B)

注 意 事 項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子とは別になっているので、解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。
3. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。
決して氏名は書いてはいけない。
4. 合計 4 題解答すること。
5. 問題群 **3**, **4** の問題は選択問題である。下にその注意を述べる。
 - (1) 各問題群より、それぞれ 1 題ずつ選択し解答すること。
 - (2) 解答用紙の解答番号マーク欄にある番号の中から、選択した問題番号を○で囲むこと。
 - (3) 選択した問題以外の解答は採点されない。
 - (4) 各群において 2 題以上解答した場合も採点されない。
6. この問題冊子は持ち帰ること。

- 1** b を整数とする。2 次方程式 $x^2 - (b + 3)x + b^2 = 0$ が整数解をもつとき、 b および、そのときの方程式の解をすべて求めよ。

2

(1) 次の不等式を証明せよ。

$$|\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \theta| \leq 1$$

(2) 次の不等式を証明せよ。

$$|\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cos \gamma \sin \beta \cos \delta + \sin \alpha \sin \gamma \sin \beta \sin \delta \cos \theta| \leq 1$$

3 次の3題 3—1, 3—2, 3—3 より1題を選択して解答せよ。

3—1 多項式 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ が次の (i), (ii), (iii) を満たしているとする。

(i) $x + 1$ で割り切れる。

(ii) $x - 1$ で割ったときの余りは8である。

(iii) $x - 2$ で割ったときの余りは36である。

(1) a, b, c を d で表せ。

(2) a, b, c, d が自然数であるとき, a, b, c, d の値を求めよ。

3—2 平面において点 O をとり, O を中心とする半径2の円に接する任意の直線を ℓ とする。直線 ℓ 上の動点 P に対し O を端点とする半直線 OP 上に $OP' = \frac{1}{OP}$ となる点 P' をとるとき, P' の軌跡を求めよ。

3—3 道しるべのために出発点に1個石を置き, 続いて奇数番目の角を曲がるたびに, 直前に置いた石の数より1個多く石を置き, 偶数番目の角を曲がるたびに直前に置いた石の数より2個多く石を置いていくことにする。 n 回角を曲がったときに置かれた石の総数を S_n とする。自然数 k に対して, $\sum_{n=0}^k S_n$ を求めよ。ただし, $S_0 = 1$ とする。

- 4 次の4題 $\boxed{4-1}$, $\boxed{4-2}$, $\boxed{4-3}$, $\boxed{4-4}$ より1題を選択して解答せよ。

$\boxed{4-1}$ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{p}$ を空間内のベクトル, t を実数とする。

- (1) ベクトルの大きさと内積の関係を用いて, 次の等式と不等式を証明せよ。

$$|t\vec{x}| = |t||\vec{x}|, |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

- (2) 不等式 $|\vec{x} + \vec{y}| + |\vec{x} - \vec{y}| \geq 2|\vec{y}|$ を証明し, さらに等号はどのような場合に成り立つかを調べよ。

- (3) 正数 R に対し, 次の2つの不等式

$$|\vec{x} + \vec{p}| + |\vec{x} - \vec{p}| \leq R, |\vec{y} + \vec{p}| + |\vec{y} - \vec{p}| \leq R$$

が成り立つとき, $0 \leq t \leq 1$ であれば $\vec{z} = t\vec{x} + (1-t)\vec{y}$ に対しても

$$|\vec{z} + \vec{p}| + |\vec{z} - \vec{p}| \leq R$$

が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{4-2}$ 次の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ の解を極形式で表せ。
- (2) 等式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$ が x についての恒等式になるように, 定数 a, b の値を定めよ。
ただし, $a > 0, b < 0$ とする。
- (3) $\cos 72^\circ$ の値を求めよ。

$\boxed{4-3}$ 原点 O を出発して, 次のルールで xy 平面上を動く点 Q がある。

ルール: 点 Q はサイコロを投げて3以上の目が出たら右に1だけ動き,
2以下の目が出たら上に1だけ動く。

整数 $k, l \geq 0$ に対し, サイコロを何回か投げた後に動点 Q が点 (k, l) に到達するという事象を $A_{k,l}$ で表すことにする。直線 $x = 3$ または直線 $y = 3$ 上の点に初めて到達するまでのサイコロ投げの回数を N で表すことにする。

- (1) 事象 $A_{k,l}$ の確率 $P(A_{k,l})$ を求めよ。
- (2) $1 \leq n \leq 7$ なる各 n について, 確率 $P(N = n)$ を求めよ。
- (3) N の平均 $E(N)$ を求めよ。

4—4

2つの自然数 M , N を INPUT 文で入力して, それらの最大公約数と最小公倍数を画面に出力するプログラムを BASIC 言語で書け。