

平成 9 年度 入学試験問題

数 学

(数学Ⅲ, 数学C)

注 意 事 項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子とは別になっているので、解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。
3. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。
決して氏名は書いてはいけない。
4. 数理・自然情報科学科を志望する者、および出願の際、数学Ⅲ・数学Cを選択科目として届け出た者は数学Ⅲ・数学Cを解答すること。
5. 合計 3 題解答すること。
6. 問題群 **3** の問題は選択問題であるので、これより 1 題を選択し、解答すること。
 - (1) 解答用紙の解答番号マーク欄にある番号の中から、選択問題番号を○で囲むこと。
 - (2) 選択した問題番号以外の解答は採点されない。
 - (3) 2 題以上解答した場合も採点されない。
7. この問題冊子は持ち帰ること。

1 $a > 0, b > 0$ とする。双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(p, q)$ における接線がこの双曲線の 2 本の漸近線と交わる点をそれぞれ Q, R とする。

- (1) 点 P は線分 QR の中点であることを証明せよ。
- (2) O を原点とするとき, $\triangle OQR$ の面積を求めよ。

2 次の等式を満たす $0 \leq x \leq 1$ で定義された関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)^2 = 2f(x) + x \int_0^1 \{f(t) - 1\}^2 dt \quad (\text{ただし, } f(0) = 2 \text{ とする})$$

3 次の3題 3—1, 3—2, 3—3 より1題を選択して解答せよ。

3—1 各成分が整数である行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し, $\Delta = ad - bc$

とし, E を単位行列とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\Delta = 1$, $A^2 = E$ を満たす行列 A をすべて求めよ。
- (2) $\Delta = 1$, $A^3 = E$ を満たす行列 A が無限個あることを示せ。

3—2 正数 k に対し, 直線 $\ell: y = -\frac{1}{2}x + k$ が楕円 $x^2 + 4y^2 = 4$ と点 P で接するとする。

- (1) 定数 k の値と接点 P の座標を求めよ。
- (2) 楕円の焦点を $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$ とするとき, F_2 の接線 ℓ に関する対称点を F'_2 とすれば, 3点 F_1, P, F'_2 は同一直線上にあることを証明せよ。

3—3 関数 $f(x) = x^2 + 2x$ ($0 \leq x \leq 1$) について以下の問いに答えよ。なお, n は自然数とする。

(1) $x_k = \frac{k}{n}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) とし, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{n}$ とする。

$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

(2) $T_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{f(x_0) + f(x_n)}{n} + 2S_n \right\}$, $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$

とする。 T_1, T_2, T_3, T_4 および C_1, C_2, C_3, C_4 を計算し, $\{T_n\}$, $\{C_n\}$ のいずれが S の近似としてすぐれているか推測せよ。