

信州大学理学部 数理・自然情報科学科

平成11年度 前期入学試験問題

数 学

注意事項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまでは開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子とは別になっている。
解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。
3. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。
決して氏名を書いてはいけない。
4. 合計6題を解答すること。
5. この問題冊子は持ち帰ること。

I

次の問いに答えよ。

- (1) a_i, b_i ($i = 1, 2, 3$) を実数とすると、次の不等式を証明せよ。

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

- (2) 実数 x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2$) が

$$x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 + 1 = 0, \quad x_2^2 + y_2^2 - z_2^2 + 1 = 0, \quad z_1z_2 > 0$$

を満たしているとする。このとき不等式

$$x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2 + 1 \leq 0$$

が成り立つことを証明せよ。また等号が成立するのは

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2$$

のときに限ることを示せ。

II

点 O を原点とする座標空間において、3つのベクトルを

$$\vec{OA} = (2, 0, 1), \vec{OB} = (1, -1, 2), \vec{OC} = (2, 1, 1)$$

とする。点 P が $\triangle ABC$ の周およびその内部を動くとき、ベクトル $\vec{OP}$ の大きさの最小値を求めよ。またそのときのベクトル $\vec{OP}$ を求めよ。

III

n を自然数とする。 $k = 0, 1, 2, \dots$ について、2次曲線 $y = x^2 + \frac{3k}{n}x + \frac{5k^2}{2n^2} + 1$ の頂点の座標を (a_k, b_k) とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 次の連立不等式

$$\begin{cases} y \geq -x - 1 \\ y \leq -x + 1 \end{cases}$$

の表す領域を D とするとき、点 (a_k, b_k) が D に含まれる k をすべて求めよ。

(2) (1) で求めた k に関する b_k の総和を求めよ。

IV

曲線 $C: y = x^3 + ax$ 上に次の条件 (i), (ii) を満たす相異なる 2 点 P, Q がとれるとする。このとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

- (i) 2 点 P, Q を通る直線 l は点 P で曲線 C に接している。
- (ii) 点 Q における曲線 C の接線と直線 l は直交している。

V

m, n を自然数とする。定積分

$$I_{m,n} = \int_1^2 (x-1)^{m-1} (x-2)^{n-1} dx$$

に対して、次の問いに答えよ。

- (1) $I_{m,1}$ を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 $I_{m,n}$ と $I_{m+1,n-1}$ についての関係式を求めよ。
- (3) $I_{m,n}$ を求めよ。

VI

曲線 $C: y = 2\sqrt{x} - x$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C のグラフをかけ。
- (2) 曲線 C 上の点 $(a, 2\sqrt{a} - a)$ における接線と2次曲線 $y = x^2 + 1$ の共有点の個数を求めよ。ただし a は正の定数とする。