

平成 11 年度 入学 試験 問題

数 学

(数学Ⅲ, 数学C)

注 意 事 項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子とは別になっているので、解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。
3. 受験番号を解答用紙の指定されたところに必ず記入すること。
決して氏名は書いてはいけない。
4. 1 , 2 , 3 とも必修問題である。
5. この問題冊子は持ち帰ること。

1 点 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ および曲線

$$C_1: x^2 + y^2 = 1, \quad C_2: x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (0 < a < 1)$$

を考える。 C_1 上の点 $P(x, y)$ を原点の周りを正の向きに $\frac{\pi}{2}$ 回転移動した点を Q とする。 P, Q から x 軸におろした垂線と C_2 との交点をそれぞれ P', Q' とする。 P が $0 < x < 1, 0 < y < 1$ の範囲を動くとするとき、四角形 $AP'Q'B$ の面積が最大となる P とそのときの面積を求めよ。またこのときの Q' を求めよ。

2

次の関係をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x + \left(2 - \frac{\pi^2}{4} + 3 \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(3t)^2 \cos 3t \, dt \right) \sin x$$

3 $x_1 = a, \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3} \quad (n = 1, 2, \dots)$ で定義される数列 $\{x_n\}$ について次の問いに答えよ。ただし a は $-\frac{3}{2} \leq a < 3$ をみたす定数とする。

(1) $a \leq x_n < 3 \quad (n = 1, 2, \dots)$ を示せ。

(2) $0 < 3 - x_{n+1} \leq \frac{2(3 - x_n)}{3 + \sqrt{2a + 3}} \quad (n = 1, 2, \dots)$ を示し, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。