

1

次の問いに答えよ。

(1) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ の値を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 3x \, dx$ を求めよ。

(3) 定積分 $\int_0^1 \frac{x}{x^2 - 4} \, dx$ を求めよ。

(4) 行列 $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^3$ を求めよ。

2

サイコロを何回か振って、1の目が2回出たらクリアできるゲームがある。このゲームについて、次の問いに答えよ。ただし、 n は自然数である。

- (1) サイコロを2回振っただけでクリアできる確率 P_2 を求めよ。
- (2) サイコロを振って3回目にクリアできる確率 P_3 を求めよ。
- (3) サイコロを振って $n+1$ 回目にクリアできる確率 P_{n+1} を求めよ。
- (4) サイコロを振った回数が $n+1$ 回以下でクリアできる確率を求めよ。

3

$\triangle ABC$ は, 3 辺の長さが

$$AB = 1, \quad BC = \sqrt{6}, \quad CA = 2$$

である。 $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の外心 (外接円の中心) を O とする。このとき, $\overrightarrow{AO} = s\vec{u} + t\vec{v}$ となる実数 s, t を求めよ。

4

次の問いに答えよ。

(1) $x^3 - 63x + 162$ を因数分解せよ。

(2) 整数 a, b, c, d に対し、複素数 $u = a + b\sqrt{3}i$, $v = c + d\sqrt{3}i$ が次の2つの等式

$$u^3 + v^3 = -162, \quad uv = 21$$

を満たすとする。このとき、 a, b, c, d を求めよ。ただし i は虚数単位とする。

5

関数 $f(x) = \frac{1}{2}(x - a)^2 + \sin x \cos x$ が、区間 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で極大値と極小値をもつための実数 a の値の範囲を求めよ。

6

次の問いに答えよ。

- (1) 座標平面上の2点 $F(1, 1)$, $F'(-1, -1)$ からの距離の差が2である点の軌跡を C とする。双曲線 C の方程式を求めよ。
- (2) 双曲線 C と直線 $x + y = 2$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} \, dx$ を S を用いて表せ。またその値を求めよ。
- (4) 放物線 $y = x^2$ の、区間 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ に対する弧の長さを求めよ。