

1 (配点 75点)

$\triangle ABC$ において $CA = b$, $AB = c$ とする. n は自然数で, $c \leq nb$ を満たしているとする. 辺 AB , AC 上にそれぞれ点 D , E を

$$\triangle ADE = \frac{1}{n} \triangle ABC$$

となるようにとるとき, 線分 DE の長さが最小となる D , E の位置を求めよ.

2

(配点 75点)

$z^4 = i$ を満たす複素数のひとつを z_1 とする. ここで i は虚数単位 ($i^2 = -1$) である.
次の問に答えよ.

- (1) 方程式 $z^4 - i = 0$ のすべての解を z_1 を用いて表せ.
- (2) 方程式 $z^4 + 1 = 0$ のすべての解を z_1 を用いて表せ.
- (3) (2) で得られた解で, 互いに共役とならない解の組をすべてあげよ.
- (4) (2) で得られた解で, 互いに共役となる解の組をあげて, そのときの z_1 を $a + bi$ の形で表せ.

3 (配点 75点)

自然数 n に対して

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

とおく. 次の問に答えよ.

(1) 等式

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad (n \geq 1)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

4 (配点 75点)

次の各問に答えよ.

(1) 不定積分 $\int t e^t dt$ を求めよ.

(2) 次の関数 $f(x)$ の区間 $(1, e)$ における最小値を求めよ.

$$f(x) = \int_0^1 t |e^t - x| dt$$