

1

(配点 75点)

次の問に答えよ. ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

- (1) $2^{100} \times 3^{50}$ は 10 進法で何桁の数か.
- (2) 3^n が 2 進法で 159 桁になるとき, 自然数 n を求めよ.
- (3) $3^n \leq 2^{100} < 3^{n+1}$ を満たす自然数 n を求めよ.

2 (配点 75点)

$f(x) = x^3 - 4x$ とおく. 曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(a, f(a))$ ($a > 1$) における接線 l と C との交点のうち, P と異なる点を Q とする. 次の問に答えよ.

- (1) Q の座標を a を用いて表せ.
- (2) C と l で囲まれる領域のうちで x 軸より上にある部分の面積と, x 軸より下にある部分の面積が等しくなるときの a の値を求めよ.

3

(配点 75点)

座標平面上に 3 点 $A(0, t)$, $B(-2, 0)$, $C(2, 0)$ がある. ただし, $t > 0$ とする. 三角形 ABC の 3 辺 AB , BC , CA の中点をそれぞれ D , E , F とするとき, 次の問に答えよ.

- (1) 3 点 D , E , F を通る円 C_1 の中心の座標を t で表せ.
- (2) 円 C_1 と直線 AB の交点のうち D と異なる点を G とする. ただし, C_1 と直線 AB が接するときは $G = D$ とする. このとき, $\angle BGC$ の大きさを求めよ.
- (3) C_1 が, BC を直径とする円 C_2 の外側に出ないための t の条件を求めよ. ここで, C_1 の円弧の一部分でも C_2 の外に出ているときは, C_1 は C_2 の外側に出ているというものとする.

4

(配点 75点)

i は虚数単位とし, n は正の整数とする. 次の間に答えよ.

(1) どのような実数 θ に対しても等式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

(2) $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^n + i^n = 0$ を満たす n を $1 \leq n \leq 100$ の範囲ですべて求めよ.