

**1**  $i$  を自然数とし,  $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$  を 2 次の列ベクトルとする。

(1)  $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mathbf{x}_1$  とするとき, ベクトルの長さ  $|\mathbf{x}_2|$  を  $|\mathbf{x}_1|$  を用いて表せ。

(2) ベクトルの列  $\{\mathbf{x}_i\}$  が  $\mathbf{x}_{i+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mathbf{x}_i$  を満たすとき, 任意の  $\mathbf{x}_1$  に対して,  $\lim_{i \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_i| = 0$  となるための  $a, b$  の条件を求めよ。

(3) (2)の条件を満たす  $a, b$  とベクトル  $\mathbf{v}$  について

$$\mathbf{y}_{i+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mathbf{y}_i + \mathbf{v}$$

で定められるベクトルの列  $\{\mathbf{y}_i\}$  を考える。このとき, あるベクトル  $\mathbf{u}$  があって,  $\lim_{i \rightarrow \infty} |\mathbf{y}_i - \mathbf{u}| = 0$  となる。この性質をもつ  $\mathbf{u}$  を  $\mathbf{v}$  を用いて表せ。

**2**  $n$  を 0 以上の整数とし、 $a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^{-x} dx$  とおく。ただし、 $0! = 1$  である。

(1)  $a_0, a_1$  を求めよ。

(2)  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$  であることを示し、極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

(3)  $a_{n+1}$  と  $a_n$  の関係式を求めよ。

(4)  $a_n$  を考えることにより、無限級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  の和を求めよ。

**3**

- (1) 定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta$  の値を求めよ。
- (2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^4 \theta d\theta$  を示せ。
- (3) 次の曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

$$x = \cos^3 \theta, \quad y = \sin^3 \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$