

1

(配点 75点)

座標平面上に 3 点 $A(0, t)$, $B(-2, 0)$, $C(2, 0)$ がある. ただし, $t > 0$ とする. 三角形 ABC の 3 辺 AB , BC , CA の中点をそれぞれ D , E , F とするとき, 次の問に答えよ.

- (1) 3 点 D , E , F を通る円 C_1 の中心の座標を t で表せ.
- (2) 円 C_1 と直線 AB の交点のうち D と異なる点を G とする. ただし, C_1 と直線 AB が接するときは $G = D$ とする. このとき, $\angle BGC$ の大きさを求めよ.
- (3) C_1 が, BC を直径とする円 C_2 の外側に出ないための t の条件を求めよ. ここで, C_1 の円弧の一部でも C_2 の外に出ているときは, C_1 は C_2 の外側に出ているというものとする.

2

(配点 75点)

i は虚数単位とし, n は正の整数とする. 次の問に答えよ.

(1) どのような実数 θ に対しても等式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

(2) $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^n + i^n = 0$ を満たす n を $1 \leq n \leq 100$ の範囲ですべて求めよ.