

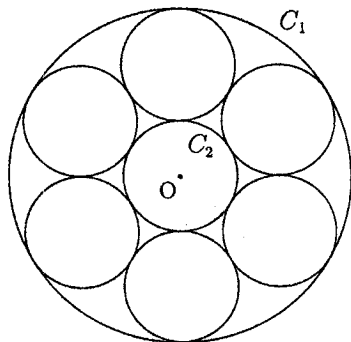
1 (配点 75点)

放物線 $y = x^2 - x + 2$ の直交する 2 接線と, この放物線とで囲まれた図形の面積の最小値を求めよ.

2

(配点 75点)

点 O を中心とする円 C_1 と C_2 がある. C_1 の半径は 1 とし, C_2 は C_1 内にある. 図のように, 同じ半径をもつ 6 個の円が, それぞれ C_1 に内接し, C_2 には外接して, お互いに重なり合うことはなく, 隣り合うどの 2 つの円も外接している. この 6 個の円の面積の合計を S_1 とする. 同じように, O を中心とする円 C_3 が C_2 内にあり, 同じ半径をもつ 6 個の円が, それぞれ C_2 に内接し, C_3 には外接して, お互いに重なり合うことはなく, 隣り合うどの 2 つの円も外接している. この 6 個の円の面積の合計を S_2 とする. 以下, これを繰り返して, $k = 1, 2, \dots, n$ について, O を中心とする円 C_{k+1} が C_k 内にあり, 同じ半径をもつ 6 個の円が, それぞれ C_k に内接し, C_{k+1} には外接して, お互いに重なり合うことはなく, 隣り合うどの 2 つの円も外接している. この 6 個の円の面積の合計を S_k とする. 次の問に答えよ.



(1) C_2 の半径と S_1 を求めよ.

(2) $S_1 + S_2 + \dots + S_n$ を求めよ.

3 (配点 75点)

x, y, z は

$$xyz = 1$$

を満たす実数とする. 次の 2 つの不等式を証明せよ.

$$(1) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq x^2 + y^2 + z^2$$

$$(2) \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} < \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^2$$

4

(配点 75点)

i を虚数単位 ($i^2 = -1$) とし, $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ とおく.

- (1) $\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ が成り立つことを示せ.
- (2) α^k が方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解になるとき, 自然数 k ($1 \leq k \leq 5$) を求めよ.
- (3) α^k が方程式 $x^2 - x + 1 = 0$ の解になるとき, 自然数 k ($1 \leq k \leq 5$) を求めよ.