

1

(配点 75点)

$f(x) = ax^2 + x - a$ について、次の問に答えよ.

- (1) a の値にかかわらず、 $y = f(x)$ のグラフはつねに 2 つの定点 A, B を通る. A, B の座標を求めよ.
- (2) (1) の A, B の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とする. a が $-3 \leq a \leq 3$ の範囲で変わるとき、 xy 平面で $y = f(x)$ のグラフが動いてできる図形のうち、 $\alpha \leq x \leq \beta$ の部分の面積 S を求めよ.

2

(配点 75点)

O を原点とする座標空間で、O を通る平面 π 上に 2 点 P_1 と P_2 を

$$OP_1 = OP_2 = 1$$

を満たすようにとる。次の問に答えよ。

(1) $OP_1 \perp OP_2$ であるための必要十分条件は、平面 π 上の任意の点 P に対し

$$\overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP_1})\overrightarrow{OP_1} + (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP_2})\overrightarrow{OP_2}$$

が成り立つことである。これを証明せよ。ここで、 $\cdot$ は内積を表す。

(2) $OP_1 \perp OP_2$ とし、 $P_1(p_1, q_1, r_1)$, $P_2(p_2, q_2, r_2)$ とする。点 $A(1, 1, 1)$ から平面 π に下した垂線の足を H とおくとき

$$\overrightarrow{OH} = (p_1 + q_1 + r_1)\overrightarrow{OP_1} + (p_2 + q_2 + r_2)\overrightarrow{OP_2}$$

が成り立つことを示せ。ただし、 A が平面 π 上にあるときは、 $H = A$ とする。