

1

2つの箱があり，左の箱には10個の白玉，右の箱には20個の白玉が入っている。さらに40個の赤玉のうち n 個を左の箱に入れ，残りを右の箱に入れてよく混ぜておく。

- (1) 左右それぞれの箱から1つずつ玉を取り出すとき，同じ色である確率 $p(n)$ を求めよ。
- (2) $p(n) = \frac{1}{2}$ となる n を求めよ。
- (3) $p(n)$ が最小になるのは， $n = 40$ のときであることを示せ。

2 xy 平面の 3 点を $P(\sqrt{3}, 0)$, $Q(0, 1)$, $R(0, -1)$ とする。円 C_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) は、次の (i), (ii), (iii) を満たす位置にあるとする。

- (i) C_0 は $\triangle PQR$ に内接している。
- (ii) $n \geq 1$ に対して、 C_n は線分 PQ と PR に接している。
- (iii) $n \geq 0$ に対して、 C_{n+1} と C_n は外接しており、 C_{n+1} は C_n より点 P に近い位置にある。

このとき、円 C_n の半径と、 C_n の中心の x 座標を求めよ。

3

(1) $\tan \frac{\theta}{2} = t$ のとき、次の等式を証明せよ。

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(2) θ が $0^\circ < \theta < 180^\circ$ の範囲を動くとき、 $x \cos \theta + y \sin \theta = 1$ を満たす点 (x, y) の存在範囲を図示せよ。

4 $a > 0, b > 0$ とする。2つの放物線 $y = x^2$ と $y = -ax^2 + b$ の交点では、その点におけるそれぞれの接線が直交しているとする。

(1) a と b が満たす関係式を求めよ。

(2) 2つの放物線で囲まれた図形の面積が $\frac{1}{3}$ になるときの a と b の値を求めよ。