

問題 1 n は 0 以上の整数として、不定積分 I_n を

$$I_n = \int \sin^n x \, dx \quad (1)$$

とするとき、以下の問いに答えよ。

問 1 n が 2 以上の整数であるとき、 I_n は次の漸化式

$$I_n = \frac{1}{n} \{ -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} \} \quad (2)$$

が成り立つことを示せ。

問 2 上の漸化式を利用して次の二つの定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx \quad (3)$$

と

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx \quad (4)$$

の値を求めよ。

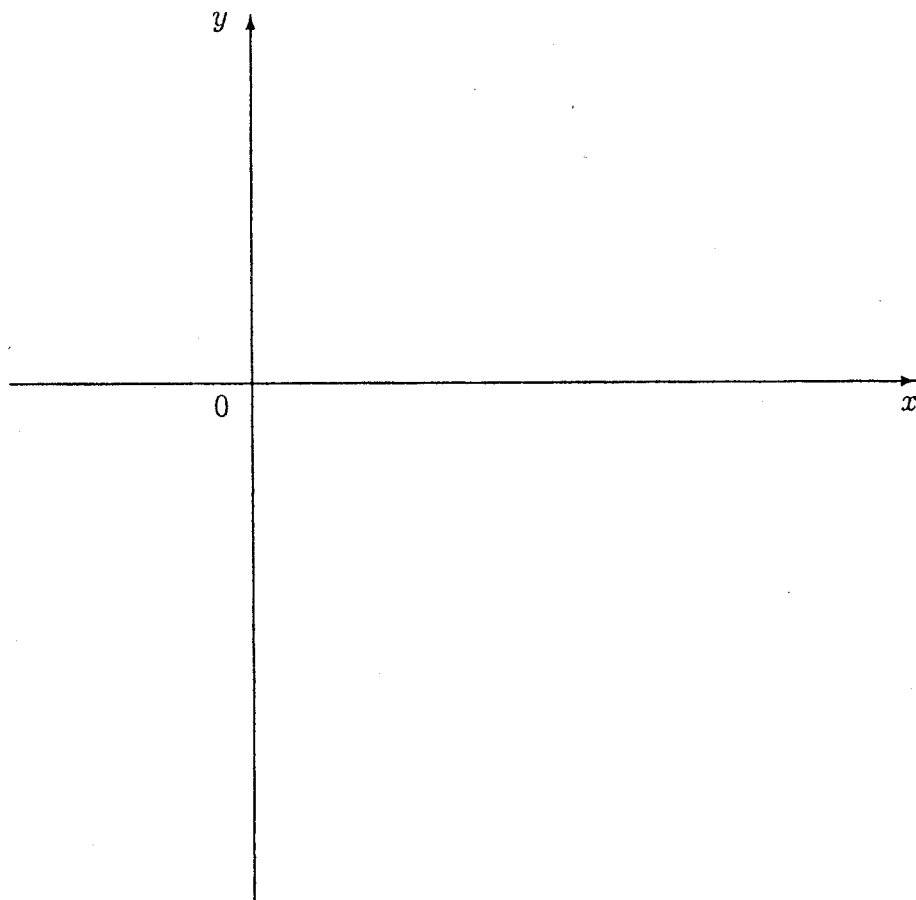
[解答は次のページから始めること。]

問題 2 次の問いに答えよ。

問 1 曲線 $y = x \log x$ の極値の座標 (a, b) を求めよ。ただし、 x は正の実数変数である。

問 2 曲線 $y = x \log x$ と、2つの直線 $x = 1$ と $y = b$ によって囲まれた領域を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

(必要ならば下に示している座標平面を用いてよい。)



[解答は次のページから始めること。]

問題 3 関数 $f(x)$ は 3 次以下の整式で、

$$f(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt + \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 12x + 2 \quad (1)$$

なる関係式を満たしているものとする。 $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ で表すとして、以下の問いに答えよ。

問 1 $f(0)$ の値を求めよ。

問 2 $f^{(1)}(0)$ の値を求めよ。

問 3 $f^{(2)}(0)$ の値を求めよ。

問 4 $f^{(3)}(0)$ の値を求めよ。

問 5 問 1 から問 4 を参考にして 3 次の整式

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (2)$$

の係数 A, B, C, D を求めよ。

[解答は次のページから始めること。]