

1

(配点 75点)

a, b, c, d を正の実数とするとき, 2 次方程式

$$x^2 - (a + b)x + ab - cd = 0$$

について, 次の各問に答えよ.

- (1) 異なる 2 実数解をもつことを示せ.
- (2) 2 つの解のうち少なくとも 1 つは必ず正の数であることを示せ.
- (3) 2 つの解を α, β とし $0 < \alpha < \beta$ とするとき, $a, a + b, \alpha, \beta$ の大小関係を示せ.

2

(配点 75点)

半径 r の円 O がある. 四角形 $ABCD$ がこの円に内接し, その 4 辺の長さがそれぞれ $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 5$, $DA = 6$ であるとき, 次の各問に答えよ.

- (1) $\angle ABC = \theta$ とおくとき, $\cos \theta$ の値を求めよ.
- (2) 半径 r の値を求めよ.
- (3) $\triangle AOC$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の何倍か.

3

(配点 75点)

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{9a_n + 1}{a_n + 9} \quad (n \geq 1)$$

と定める.

(1) $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ とおくとき $\{b_n\}$ は等比数列であることを示し, 一般項 b_n を求めよ.

(2) 一般項 a_n を求め, $a_n < \frac{25}{24}$ が成り立つ最小の n を求めよ. なお, 計算には

$$\log_{10} 2 = 0.3010, \quad \log_{10} 3 = 0.4771, \quad \log_{10} 7 = 0.8451$$

を用いよ.

4 (配点 75点)

t を $1 \leq t \leq 2$ の実数とし, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 3(1+t)x^2 + 12tx$$

とする. $0 \leq x \leq 4$ における $f(x)$ の最大値を $g(t)$ とするとき $\int_1^2 g(t) dt$ を求めよ.