

1 (配点 75点)

関数 $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) について次の各問に答えよ.

- (1) 極値を求めて, $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.
- (2) グラフと x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ.

2 (配点 75点)

3 次行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

に対して

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく. 次の各問に答えよ.

(1) J^3 を求めよ.

(2) 任意の自然数 $n \geq 2$ に対して

$$(D + J)^n = D^{n-2} \left(D^2 + nDJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \right)$$

が成り立つことを示せ. ただし, $D^0 = E$ (単位行列) とする.

(3) $a = b = c = 1$ とするとき, $\sum_{k=1}^n A^k$ を求めよ.