

1数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1, \quad \frac{a_n - 2a_{n+1}}{n} = 2a_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義されているとき、次の問に答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ が成り立つことを示せ。
- (2) $b_n = \frac{1}{a_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくとき、数列 $\{b_n\}$ のみたす漸化式を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

2

原点 O を出発して x 軸上を動く点 P がある。 P は 1 つのさいころを投げるごとに右（正方向）か左（負方向）へ 1 進む。

出発点 O を P_0 とし、さいころを k 回投げるときに点 P が動いた点を順に $P_1, P_2, \dots, P_k$ とする。このとき、 $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$ を点 P が通った点とよぶことにする。

点 P が座標 a の点にいるとき、 P は次の規則に従って動くものとする。

- (ア) 点 P が座標 $a+1$ と $a-1$ の 2 点とも通ったことがあるか、または一度も通ったことがなければ、1, 2, 3 の目で左へ 1 動き、4, 5, 6 の目で右へ 1 動く。
- (イ) 点 P が座標 $a-1$ の点のみ通ったことがあり $a+1$ の点は通ったことがないときには、1, 2, 3, 4 の目で左へ 1 動き、5, 6 の目で右へ 1 動く。
- (ウ) 点 P が座標 $a+1$ の点のみ通ったことがあり $a-1$ の点は通ったことがないときには、1, 2 の目で左へ 1 動き、3, 4, 5, 6 の目で右へ 1 動く。

たとえば、1 回目にさいころを投げたときには、点 P は座標が 1 と -1 のどちらの点も通ったことがないので、(ア) の規則から左右どちらかに同じ確率で 1 動く。その結果右に動いたとすれば、次にさいころを投げるときには (イ) の規則によって 1, 2, 3, 4 の目で左へ 1 動き、5, 6 の目で右へ 1 動く。

このとき、次の問に答えよ。

- (1) さいころを 2 回投げたあとで、点 P が原点 O にいる確率を求めよ。
- (2) さいころを 6 回投げたあとで、点 P が原点 O にいる確率を求めよ。

3

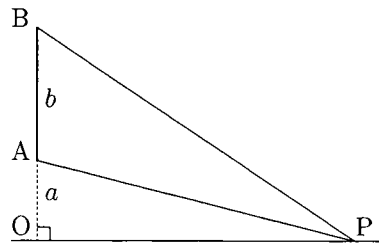
n を自然数とするととき次の等式を証明せよ。ただし $\sin \frac{\beta}{2} \neq 0$ とする。

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(\alpha + k\beta) = \frac{\sin \frac{n\beta}{2} \sin \left(\alpha + \frac{n-1}{2} \beta \right)}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(\alpha + k\beta) = \frac{\sin \frac{n\beta}{2} \cos \left(\alpha + \frac{n-1}{2} \beta \right)}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

4

図のように地面上の点 O の真上に長さ b の棒 AB が地面に垂直になるようにつるしてあり、その下端 A は地面から高さ a のところにある。ただし $a > 0$ とする。この棒を地面上を動く点 P から観測する。このとき $\angle BPA$ が最大になる点 P に対し OP の長さを求めよ。なお地面は水平面とみなす。



5

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義は以下の式で与えられる。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

たとえば、関数 $3x^2$ の導関数 $(3x^2)'$ を求めると以下ようになる。

$$(3x^2)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h) = 6x$$

導関数の定義式を用いて、対数関数 $\log_a x$ の導関数は

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

で与えられることを示せ。ただし、 $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とし、 $x > 0$ とする。ここで、 $\log a$ は a の自然対数であり、その底は $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ で与えられる。

6

正の数 a, b, c は $a < b < c$ の関係にあり、 $3a + c \neq 4b$ とする。 $f(x) = -\log x$ とおくとき、座標平面上に 4 点 $A(a, f(a))$, $B(b, f(a))$, $C(c, f(a))$, $D(c, f(c))$ を定める。線分 AC を $1:3$ に内分する点を M とする。 B を通る y 軸に平行な直線が曲線 $y = f(x)$ と交わる点を E とし、 M を通る y 軸に平行な直線が線分 AD に交わる点を F とする。

次に、線分 BM を $2:1$ に内分する点を N とし、 N を通る y 軸に平行な直線が線分 EF および曲線 $y = f(x)$ と交わる点をそれぞれ P および Q とする。

このとき、次の問に答えよ。

- (1) 点 P と点 Q の座標を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ は下に凸であることを示せ。
- (3) (1), (2) を用いて

$$a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{6}} < \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{6}$$

を示せ。

7

定積分

$$\int_0^{\pi} \left| 1 - \sqrt{2} - 2\sin^2 \theta - 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta \right| d\theta$$

の値を求めよ。