

①

$$(1) \quad \overrightarrow{OP} = (1-t^2)\overrightarrow{OD} + t^2\overrightarrow{OC} \\ = \frac{1}{2}(1-t^2)\overrightarrow{OA} + t^2\overrightarrow{OC} \quad \dots\dots\dots (答)$$

$$(2) \quad \overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}t\overrightarrow{OC} \\ \therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ = -\frac{1}{2}(1-t^2)\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{t}{4} - t^2\right)\overrightarrow{OC}$$

これが $\overrightarrow{OB}$ の実数倍に成るためには、 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ が
1次独立なのを、 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ の係数が0に成るなければ
ならないから、 $\overrightarrow{OA}$ の係数について
 $1-t^2=0$.

は $0 < t < 1$ の範囲では不可能である。

$$(3) \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ |\overrightarrow{OC}|^2 = 1$$

であるから、(1)、(2)の $\overrightarrow{OP}$ 、 $\overrightarrow{OQ}$ より

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}(1-t^2)(1-t) + \frac{1}{16}(1-t^2)t \\ + \frac{1}{2}t^2(1-t) + \frac{1}{4}t^3 \\ = \frac{1}{16}(-t^3 + 4t^2 - 3t + 4)$$

これを $f(t)$ とおくと

$$f'(t) = -\frac{1}{16}(3t^2 - 8t + 3)$$

よって、増減は右表
のとおりであり、

$$t = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

t	0		$\frac{4-\sqrt{7}}{3}$		1
f'(t)		-	0	+	
f(t)		↘		↗	

のとき最小である。 $f(t)$ を $3t^2 - 8t + 3$ で割ると

$$f(t) = \frac{1}{16} \left\{ (3t^2 - 8t + 3) \left(-\frac{1}{3}t + \frac{4}{9} \right) + \frac{14}{9}t + \frac{8}{3} \right\}$$

これに代入して、最小値は

$$f\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{1}{16} \left\{ \frac{14}{9} \left(\frac{4-\sqrt{7}}{3} \right) + \frac{8}{3} \right\} \\ = \frac{64-7\sqrt{7}}{216} \quad \dots\dots\dots (答)$$

②

条件(1)より $q = 1 + a + b + c$

$$\therefore a + b + c = 8 \dots\dots\dots ①$$

 $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$ したがって、条件(2)より

$$a^2 - 3b > 0 \dots\dots\dots ②$$

 $f(x) = 0$ の解は α, β とすると、条件(3)の m は

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^2 - \beta^2 + a(\alpha - \beta) + b(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} \\ &= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + a(\alpha + \beta) + b \\ &= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta + a(\alpha + \beta) + b \end{aligned}$$

他より $\alpha + \beta = -\frac{2}{3}a$, $\alpha\beta = \frac{b}{3}$ であるから

$$m = \left(-\frac{2}{3}a\right)^2 - \frac{b}{3} + a\left(-\frac{2}{3}a\right) + b = -\frac{2}{9}a^2 + \frac{2}{3}b$$

したがって、条件(3)より

$$-\frac{2}{9}a^2 + \frac{2}{3}b > -1 \quad \therefore a^2 - 3b < \frac{9}{2} \dots\dots\dots ③$$

②、③より a, b は整数であることがわかる。

$$a^2 - 3b = 1, 2, 3, 4 \quad \text{のいずれか} \dots\dots\dots ④$$

また、①より a, b, c は自然数であることがわかる。 a, b は 6 以下の自然数。

このようにして④を満たすものは、

$$(a, b) = (2, 1), (3, 2), (4, 4), (4, 5).$$

これを①に代入して、 c が正に成るものを探すと

$$(a, b, c) = (2, 1, 5), (3, 2, 3).$$

これである。したがって、

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x^2 + x + 5 \\ f(x) &= x^3 + 3x^2 + 2x + 3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \left(\frac{5}{6}\right)$$