

①

$$(1) \quad y' = \frac{1 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

増減は右表のとおり.

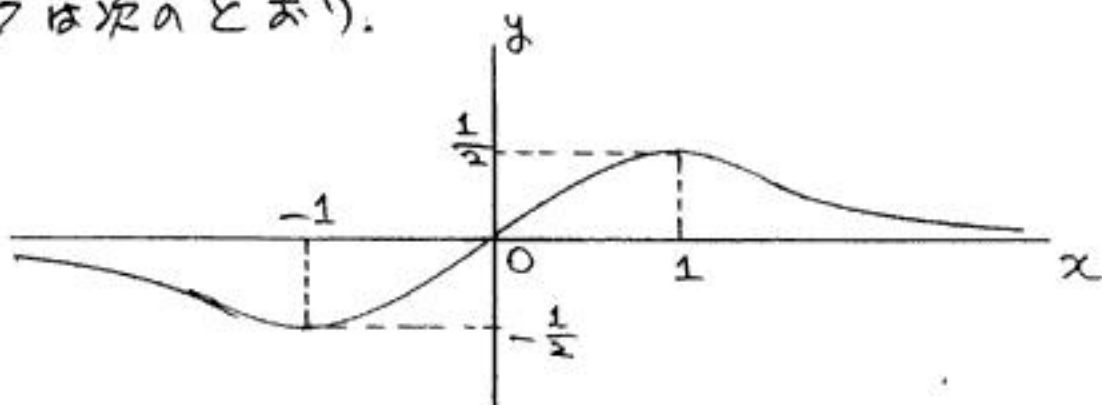
$$\text{極小値 } f(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{極大値 } f(1) = \frac{1}{2}$$

x		-1		1	
y'	-	0	+	0	-
y		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	

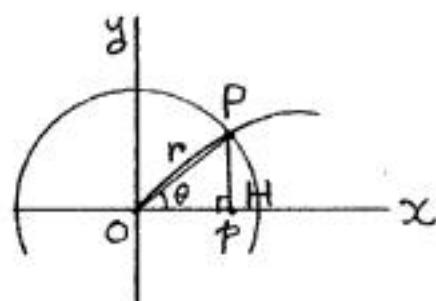
また $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ だから, x 軸が漸近線である.

グラフは次のとおり.



(2) P から x 軸に下ろした垂線の足を H とし, $\angle POH = \theta$ とおく. P の y 座標を q とおくと $q = \frac{p}{p^2+1}$

$$\tan \theta = \frac{q}{p} = \frac{1}{p^2+1}$$



$r \rightarrow 0$ とき $p \rightarrow 0$ であるから, $\tan \theta \rightarrow 1 \quad \therefore \theta \rightarrow 45^\circ$

$$\therefore \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{r}{p} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{2} \quad \text{-----} \left(\frac{4}{5} \right)$$

$$(3) \quad S = \int_0^p \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \log(x^2+1) \right]_0^p \\ = \frac{1}{2} \log(p^2+1)$$

$$\therefore \lim_{r \rightarrow 0} \frac{S}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\log(p^2+1)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\log(p^2+1)}{p^2} \frac{p^2}{r^2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\log(p^2+1)}{p^2} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{p}{r} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{-----} \left(\frac{4}{5} \right)$$

②

$$(1) (a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5}) = ac+5bd+(ad+bc)\sqrt{5}$$

であるから、

$$p = ac+5bd, \quad q = ad+bc$$

$$\begin{aligned} \therefore M(a,b)M(c,d) &= \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 5d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac+5bd & ad+bc \\ 5(ad+bc) & ac+5bd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p & q \\ 5q & p \end{pmatrix} = M(p,q) \end{aligned}$$

(2) a, b, r, s について条件が成り立つならば

$$(a+b\sqrt{5})(r+s\sqrt{5}) = 1$$

も成り立つ、これは (1) で $c=r, d=s, p=1, q=0$ の場合、に相当するのだから

$$M(a,b)M(r,s) = M(1,0)$$

が成り立つ、すなわち

$$M(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ は単位行列}$$

であるから、 $M(r,s)$ は $M(a,b)$ の逆行列であり

$$M(a,b)^{-1} = M(r,s)$$

(3) n についての数学的帰納法を示す。

i) $n=1$ のとき、 $a_1=1, b_1=1$ であるから、

$$M(1,1)^n = M(1,1) \text{ と容易に明らかである。}$$

ii) ある n に対して $M(1,1)^n = M(a_n, b_n)$ が成り立つと仮定する。 a_n, b_n の決め方は

$$(1+\sqrt{5})(a_n+b_n\sqrt{5}) = a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{5}$$

であるから、(1)より

$$M(1,1)M(a_n, b_n) = M(a_{n+1}, b_{n+1})$$

が成り立つ、すなわち $M(a_n, b_n) = M(1,1)^n$ を代入して

$$M(1,1)^{n+1} = M(a_{n+1}, b_{n+1})$$

よって、証明すべき式が $n+1$ に対しても成り立つ。