

1

- (1)  $(0,0)$  を通る  $a$  を  $x^2+y^2+ax+by=0$  とおく。点  $(1,1)$  を通ることから、  
 $1+1+a+b=0 \iff b=-a-2$  であり、円  $C$  の方程式は  $x^2+y^2+ax-(a+2)y=0$

$$x^2+y^2+ax-(a+2)y=0$$

と置き、この点  $(\alpha, \alpha+1)$  を代入すれば、

$$\alpha^2+(\alpha+1)^2+a\alpha-(a+2)(\alpha+1)=2\alpha^2-\alpha-1=0$$

$$\iff a=2\alpha^2-1$$

よって、円  $C$  の方程式は  $\alpha$  を用いて、

$$\underline{x^2+y^2+(2\alpha^2-1)x-(2\alpha^2+1)y=0}$$

- (2) (1) の結果を

$$\left(x+\alpha^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\alpha^2-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\alpha^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\alpha^2+\frac{1}{2}\right)^2$$

と変形すれば、半径は  $\sqrt{5}a$  とする

$$\left(\alpha^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\alpha^2+\frac{1}{2}\right)^2=2\alpha^4+\frac{1}{2}=5 \iff \alpha^2=\frac{3}{2}$$

よって、 $\alpha=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$  であり、このとき  $\alpha$  の中心  $\left(-\alpha^2+\frac{1}{2}, \alpha^2+\frac{1}{2}\right)$  は  $(-1, 2)$  である。

2

真条件より  $a - 2a < x < 2a$  の閉区間  $[-a, a]$  は含まれている。

$$f(x) = \log_a(2a+x) + \frac{\log_a(2a-x)}{\log_a a^2} = \log_a(2a+x) + \frac{\log_a(2a-x)}{2}$$

$\Rightarrow 2 \times f(x) = \log_a\{(2a+x)^2(2a-x)\}$ ;  $a$  の最大値と最小値を求む。

(i)  $a > 1$   $a$  と  $\log_a X$  は  $X$  の増加関数であり、

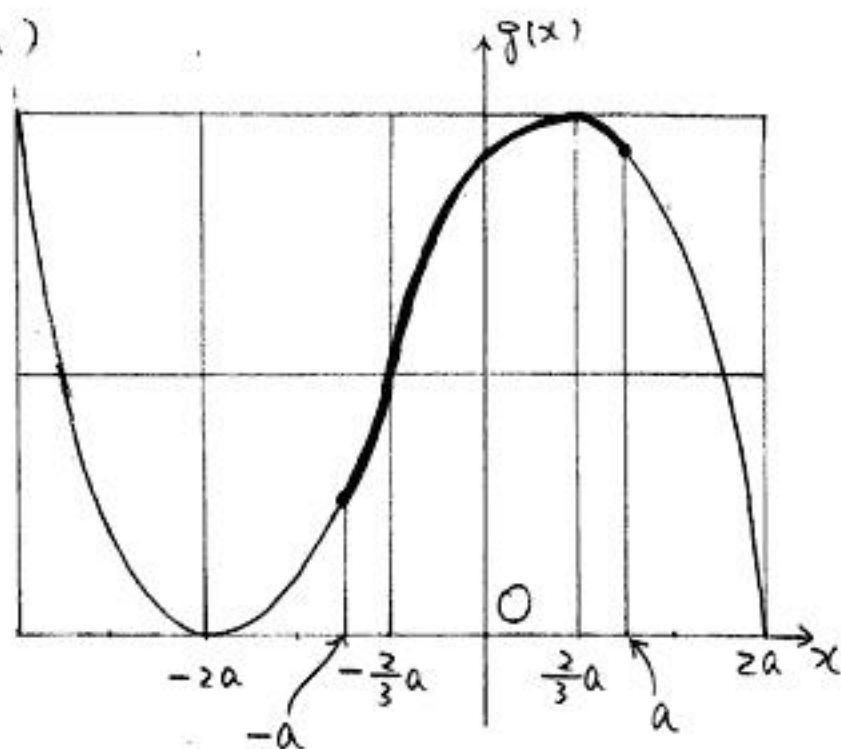
$$g(x) = (2a+x)^2(2a-x) = -(x+2a)^2(x-2a)$$

$a - a \leq x \leq a$  における増減を調べると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2(x+2a)(x-2a) - (x+2a)^2 \\ &= -(x+2a)\{2(x-2a) + (x+2a)\} \\ &= -(x+2a)(3x-2a) \end{aligned}$$

よって、右図のよう。

$$\begin{cases} \max_1 = g\left(\frac{2}{3}a\right) \\ \quad = \left(\frac{8}{3}a\right)^2 \times \frac{4}{3}a = \frac{256}{27}a^3 \\ \min_1 = g(-a) \\ \quad = a^2 \times 3a = 3a^3 \end{cases}$$



とわかる。

単調増加であるから、この場合の  $f(x)$  の最大値と最小値は

$$\begin{cases} \max_1 = \frac{1}{2} \log_a\left(\frac{256}{27}a^3\right) = \frac{1}{2}(8 \log_a 2 - 3 \log_a 3 + 3) \\ \quad = 4 \log_a 2 - \frac{3}{2} \log_a 3 + \frac{3}{2} = 4A - \frac{3}{2}B + \frac{3}{2} \\ \min_1 = \frac{1}{2} \log_a(3a^3) = \frac{1}{2}(\log_a 3 + 3) = \frac{1}{2}B + \frac{3}{2} \end{cases}$$

(ii)  $0 < a < 1$   $a$  と  $\log_a X$  は  $X$  の減少関数であり、(i) とは逆に

$$\max_1 = \frac{1}{2}B + \frac{3}{2}, \min_1 = 4A - \frac{3}{2}B + \frac{3}{2}$$

となる。

3

$$(1) {}_{10}C_5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 252 \times \frac{3^5}{2^{20}} = \frac{63 \times 243}{2^{18}} = \frac{15309}{262144}$$

$$(2) \begin{cases} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} \\ \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(-\frac{3}{4}\right)^{10-k} \end{cases} \quad ; \text{この二つの和を求めれば,}$$

右辺は  $k$  が奇数のとき  $\left(-\frac{3}{4}\right)^{10-k} = -\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}$  であることから, これらの項が  
相殺されて,  $k$  が偶数のときのみが和 (求める確率) の  $2$  倍となる。

よって, これを用いれば

$$\begin{aligned} \sum_{k: \text{偶数}} {}_{10}C_k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} &= \frac{1}{2} \left\{ 1^{10} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2^{10}} \right) = \frac{2^{10} + 1}{2^{11}} = \frac{1025}{2048} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sum_{k=6}^{10} {}_{10}C_k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} &= \frac{1}{2^{20}} \sum_{k=6}^{10} {}_{10}C_k \times 3^{10-k} \\ &= \frac{{}_{10}C_6 \times 3^4 + {}_{10}C_7 \times 3^3 + {}_{10}C_8 \times 3^2 + {}_{10}C_9 \times 3 + {}_{10}C_{10}}{2^{20}} \\ &= \frac{210 \times 81 + 120 \times 27 + 45 \times 9 + 10 \times 3 + 1}{2^{20}} = \frac{20686}{2^{20}} \\ &= \frac{10343}{2^{19}} = \frac{10343}{524288} \end{aligned}$$

$$(1) \frac{CH}{AC} = |\cos \angle C| \Leftrightarrow CH = b \times |\cos \angle C| \text{ であるから、}$$

$$CH = b \times \left| \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right| = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2a}$$

((注)) 「直線 BC に下した」とあるが、鈍角三角形の場合も考慮する。

(2)  $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times c \times AD \times \sin \alpha$ ,  $\triangle ACD = \frac{1}{2} \times b \times AD \times \sin \beta$  であるから、 $\triangle ABC : \triangle ACD = c \times \sin \alpha : b \times \sin \beta$  であり、これらの三角形は BC, CD をそれぞれ底辺と見れば高さが共通であるから、面積比は底辺の長さの比であるから、

$$c \times \sin \alpha : b \times \sin \beta = BC : CD = \Delta : \lambda$$

$$\Leftrightarrow \frac{c \times \sin \alpha}{b \times \sin \beta} = \frac{\Delta}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{b \Delta}{c \lambda}$$

(3)  $BM = MC$  であるから、(2) を用いると

$$\frac{\sin \angle BAM}{\sin \angle MAC} = \frac{b}{c} \text{ ----- ①}$$

また、 $CE = x$  とおけば  $BE = a - x$  であり、再び (2) から

$$\frac{\sin \angle EAC}{\sin \angle EAB} = \frac{cx}{b(a-x)} \text{ ----- ②}$$

ここから、 $\angle BAM = \angle EAC$  と (2) いうことから、

$$\angle MAC = \angle BAC - \angle BAM$$

$$= \angle BAC - \angle EAC = \angle EAB$$

も成り立つから ① と ② の左辺は等しいことがわかり、

$$\frac{b}{c} = \frac{cx}{b(a-x)} \Leftrightarrow b^2(a-x) = c^2x$$

$$\Leftrightarrow (b^2 + c^2)x = ab^2 \Leftrightarrow x = \frac{ab^2}{b^2 + c^2}$$

を得る。

5

$z = x + yi \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ ;  $X = x^2 - y^2$ ,  $Y = 2xy$  とおく。極方程式  $r = 2(1 + \cos \theta)$  について,

$$r^2 = r \times r = 2r(1 + \cos \theta) = 2r + 2r \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow r^2 - 2r = 2r \cos \theta \quad \text{-----} (*)$$

と変形しておく。

$z = z^2$ ,  $z^2 = X + Yi$  から心臓形  $C$  を描く。

$$X + Yi = r(\cos \theta + i \sin \theta) \Leftrightarrow X = r \cos \theta, Y = r \sin \theta$$

と対応させるとき,  $(*)$  は  $X, Y$  を用いて,

$$X^2 + Y^2 - 2\sqrt{X^2 + Y^2} = 2X$$

$$\Leftrightarrow X^2 + Y^2 - 2X = 2\sqrt{X^2 + Y^2}$$

$z = z^2$ ,  $X^2 + Y^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$  より,

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 2(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 4x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 2x)(x^2 + y^2 - 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1 \quad \text{または} \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$$

今、曲線  $S$  は  $x \geq 0$  にあるとしよう。求める  $S$  は

$$\underline{(x-1)^2 + y^2 = 1}$$

である。

6

(1)  $-1 < x < 1$  のとき、 $x^{2n+1} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ),  $x^{2n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )

$$\therefore \text{よ} \text{う} \text{な} \text{に}, f(x) = \frac{x^5 + x^3}{x^2 + 1} = x^3 \text{ である。}$$

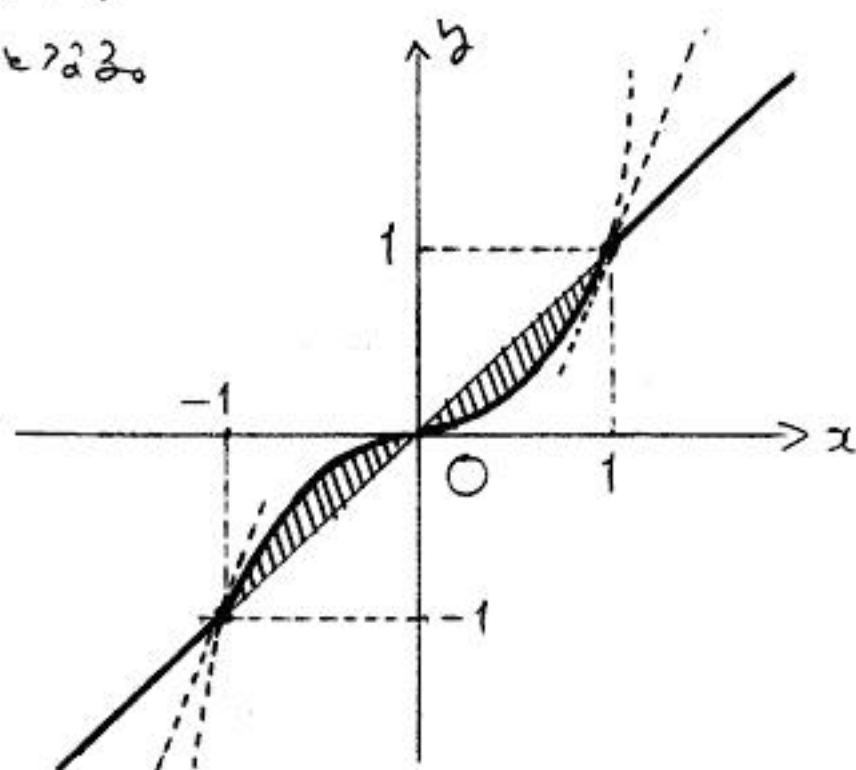
$x < -1$ ,  $x > 1$  のとき、 $n \rightarrow \infty$  とすれば

$$\frac{x^{2n+1} + x^5 + x^3}{x^{2n} + x^2 + 1} = \frac{x + x^{5-2n} + x^{3-2n}}{1 + x^{2-2n} + x^{-2n}} \rightarrow x$$

$\therefore \text{よ} \text{う} \text{な} \text{に}, f(x) = x$  である。

$$\text{また, } f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1) + (-1) + (-1)}{1 + 1 + 1} = -1, f(1) = 1; \therefore \text{よ} \text{う} \text{な} \text{に},$$

$y = f(x)$  のグラフは右図の太線とある。



(2) 右図斜線部分のこととあり、  
右下図に描いた円錐を考へる  
とき、その側面の展開図となる  
扇形の中心角は  $\sqrt{2}\pi$  である、  
側面積は

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \times \left( t^{\frac{1}{3}} - t \right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \left( t^{\frac{2}{3}} - 2t^{\frac{4}{3}} + t^2 \right) \end{aligned}$$

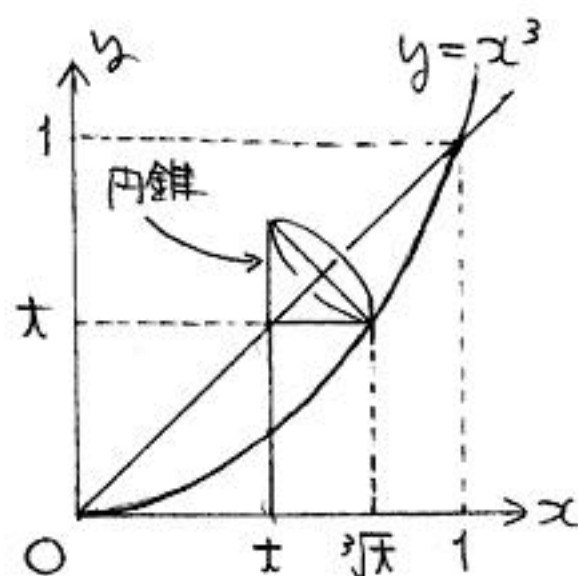
である。

よって、求める回転体の体積は

$$2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \int_0^1 \left( t^{\frac{2}{3}} - 2t^{\frac{4}{3}} + t^2 \right) dt$$

$$= \sqrt{2} \pi \times \left( \frac{3}{5} - \frac{6}{7} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{105} \pi$$



7

$$(1) \int_1^s \log x dx = [x \log x - x]_1^s = \underline{s \log s - s + 1} \quad (s > 1)$$

$$(2) \frac{(a_n)^{\frac{1}{n}}}{n} = \left( \frac{a_n}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{よって, } \log \frac{(a_n)^{\frac{1}{n}}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n}\right) \text{ である。}$$

よって、区分解法により、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right\} &= \int_1^2 \log x dx \\ &= 2 \log 2 - 1 \quad (\because (1)) \end{aligned}$$

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log \frac{(a_n)^{\frac{1}{n}}}{n} \right\} = \log 2^2 - \log e = \log \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow \log \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n)^{\frac{1}{n}}}{n} \right\} = \log \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n)^{\frac{1}{n}}}{n} = \frac{4}{e}}$$



8

(1)  $f(x) = (x+2)\sqrt{4-x^2}$  の定義域は

$$4-x^2 \geq 0 \iff -2 \leq x \leq 2$$

である,  $f(x) = (x+2)(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$  について,

$$f'(x) = (4-x^2)^{\frac{1}{2}} + (x+2) \times \frac{1}{2} (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x)$$

$$= \sqrt{4-x^2} - \frac{x(x+2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{4-x^2-(x^2+2x)}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-2(x+2)(x-1)}{\sqrt{4-x^2}}$$

である,  $-2 \leq x \leq 2$  において  $f(x)$  は  $x=1$  で極大かつ最大となる。

よって, 求める最大値は  $\underline{f(1) = 3\sqrt{3}}$  である。

$$(2) \int_1^2 (x+2)\sqrt{4-x^2} dx$$

$$= \int_1^2 x(4-x^2)^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{3} (4-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 + 2 \times \{ \text{円の一部の面積} \}$$

$$= \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} + 2 \times \{ \text{右下図の斜線部の面積} \}$$

$$= \sqrt{3} + 2 \left( \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi}}$$

