

1

$f(x)$ は、 $X = 3^x \cdots \textcircled{1}$ とおくと

$$F(X) = X^2 - 9X + 4$$

とかける。ここで、 $\textcircled{1}$ の対応から、 $X > 0 \cdots \textcircled{2}$ である。

(1) $\textcircled{1}$ の対応のもとで、 $f(x) = 4$ は

$$X^2 - 9X + 4 = 4$$

$$X = 0, 9$$

で、 $\textcircled{2}$ より、 $X = 9$

x に戻して解は、 $x = 2 \cdots$ (答)

(2) $\textcircled{1}$ の対応のもとで、与えられた不等式は

$$-4 < X^2 - 9X + 4 \leq 40 \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore \begin{cases} 0 < X^2 - 9X + 8 \cdots \textcircled{4} \\ X^2 - 9X - 36 \leq 0 \cdots \textcircled{5} \end{cases} \quad \text{となる。}$$

$\textcircled{4}$ を解くと、 $X < 1, 8 < X \cdots \textcircled{4}'$

$\textcircled{5}$ を解くと、 $-3 \leq X \leq 12 \cdots \textcircled{5}'$

となるから、 $\textcircled{4}'$ 、 $\textcircled{5}'$ と $\textcircled{2}$ から $\textcircled{3}$ の解は

$$0 < X < 1, 8 < X \leq 12$$

x に戻すと

$$0 < 3^x < 1, 8 < 3^x \leq 12 \quad \text{となり、求める解は}$$

$$\underline{x < 0, 3 \log_3 2 < 3^x \leq 1 + 2 \log_3 2 \cdots \text{(答)}}$$

(3) $\textcircled{1}$ の対応のもとで、

$$\frac{1}{3} \leq X \leq 9 \text{ での、 } F(X) = \left(X - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{65}{4} \text{ の最大・最小}$$

を求めることに帰着される。

$$\text{ここで } \frac{1}{3} < \frac{9}{2} < 9 \text{ で、かつ } \frac{9}{2} - \frac{1}{3} (< \frac{9}{2}) = 9 - \frac{9}{2} \text{ であるから、}$$

求める最大値は、 $(X=9 \Leftrightarrow) x=2$ のときの 4

$$\text{最小値は、} \left(X = \frac{9}{2} \Leftrightarrow\right) x = 2 - \log_3 2 \text{ のときの } \underline{-\frac{65}{4}} \text{ である。} \cdots \text{(答)}$$

$$(1) \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{c} \cdots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{AR} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} = -\frac{6}{5}\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b} \cdots \textcircled{2}$$

である。また、P の位置ベクトルは $\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ であるから、

$$\overrightarrow{AP} = -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \cdots \textcircled{3}$$

(2) ①, ②, ③より

$$\overrightarrow{AP} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AQ} + \frac{5}{9}\overrightarrow{AR}$$

である。上式は

線分 QR を 5 : 4 に内分する点が P であることを示しているので、P, Q, R は同一直線上にある。

(証終)

- (1) L は、 AB の中点 $(\frac{1+\cos\theta}{2}, \frac{\sin\theta}{2})$ を通り

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 \\ \sin\theta \end{pmatrix} \text{を法線ベクトルとする}$$

直線である。その式は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 \\ \sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \frac{1+\cos\theta}{2} \\ y - \frac{\sin\theta}{2} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{となり、}$$

$$1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta \text{に注意して整理すると} \\ \underline{(\cos\theta - 1)x + (\sin\theta)y = 0 \cdots (\text{答})}$$

- (2) b が0かで場合分けをして証明する。

- $b=0$ のとき、このとき $P(a,0), Q(a\cos\theta, a\sin\theta)$ であるから、(1)と同様に PQ の垂直二等分線の式を求めると、

$$a(\cos\theta - 1)x + a(\sin\theta)y = 0 \quad \text{となる。}$$

$a \neq 0$ ($\because P$ は L 上の点 O とは異なる)なので
これは L と同じ直線の式である。

- $b \neq 0$ のとき、(1)より L 上の異なる2点として、
 $O(0,0), C(b\sin\theta, b(1-\cos\theta))$ がとれる。

このとき、

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$OQ = \sqrt{(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (a\sin\theta - b\cos\theta)^2} \\ = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{より、} OP = OQ \cdots \textcircled{1}$$

また、

$$CP = \sqrt{(a - b\sin\theta)^2 + (b\cos\theta)^2} \\ = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\sin\theta}$$

$$CQ = \sqrt{(a\cos\theta)^2 + (a\sin\theta - b)^2} \\ = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\sin\theta}$$

なので、 $CP = CQ \cdots \textcircled{2}$ でもある。

以上①,②により

PQ の垂直二等分線は、 L 上の2点 O, C を通ることがわかる。ここで、 O と C は異なる2点であったので、

PQ の垂直二等分線は L と一致することが示された。

以上の場合分けによる議論から、題意は示された。

(証終)

(1) 漸化式に $b_n = c_n + n$ を代入して、

$$c_{n+1} + c_n + 2n + 1 = 2n + a$$

$$\therefore \underline{c_{n+1} = -c_n + a - 1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots (\text{答})$$

(2) (1)より、

$$c_{n+1} + c_n = a - 1 \dots \textcircled{1} \quad \text{であるから、}$$

$$c_{n+2} + c_{n+1} = a - 1 \dots \textcircled{2} \quad \text{でもある。}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ を考えて、 $n=1, 2, 3, \dots$ で

$$c_{n+2} = c_n \dots \textcircled{3}$$

がわかる。

$$\text{ここで、} \cdot c_1 = b_1 - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$\cdot (1) \text{より、} c_2 = -c_1 + a - 1 = -(-1) + a - 1 = a$$

であるから、 $\textcircled{3}$ を繰り返し用いることで、

$$c_n = \begin{cases} -1 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ a & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

と求まる。したがって、

$$\underline{b_n = \begin{cases} n-1 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ n+a & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}} \dots (\text{答})$$

(3) $a_n = n + a - 1$ であるから、(2)より条件は

$$\cdot \text{全ての奇数 } n \text{ で、} n + a - 1 \leq n - 1 \leq n + a \dots \textcircled{4}$$

$$\text{かつ、} \cdot \text{全ての偶数 } n \text{ で、} n + a - 1 \leq n + a \leq n + a \dots \textcircled{5}$$

ということである。

ここで、

$$\cdot \textcircled{4} \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 0$$

$$\cdot \textcircled{5} \text{ はどんな実数 } a \text{ でも正しい}$$

であるから、求める a の範囲は

$$\underline{-1 \leq a \leq 0} \dots (\text{答}) \quad \text{である。}$$