# 1

(1) 線分 AB の垂直二等分線は,AB の中点を通り,AB に垂直な直線である.AB の傾きは $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta-1}$ であるから, 求める直線は,

$$y-\frac{\sin\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\left(x-\frac{\cos\theta+1}{2}\right)$$
$$y=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}x\cdots(\text{答})$$

(2)$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ と $\vec{q}=\overrightarrow{OQ}$ の和と差を計算すると,

$$\vec{p}+\vec{q}=\begin{pmatrix}a(\cos\theta+1)+b\sin\theta\\ a\sin\theta+b(1-\cos\theta)\end{pmatrix}=\left\{\frac{a(1-\cos\theta)}{\sin\theta}+b\right\}\begin{pmatrix}\sin\theta\\ 1-\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\vec{q}-\vec{p}=\begin{pmatrix}a(\cos\theta-1)+b\sin\theta\\ a\sin\theta-b(1+\cos\theta)\end{pmatrix}=\left\{a-\frac{b(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\right\}\begin{pmatrix}\cos\theta-1\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

となり,$\vec{p}+\vec{q}$ は $L$ と平行であり,$\vec{q}-\vec{p}$ は $L$ と垂直であることがわかる. これらのベクトルは,OP と OQ を一辺とする平行四辺形の対角線を表すベクトルであることに注意すると, これはつまり, この平行四辺形は菱形であって,O を通る対角線は $L$ 上にあるということを意味する. したがって, このとき $L$ は PQ を垂直に二等分している.(証明終)

## 2

(1)$b_n=c_n+n$を, 与えられた漸化式に代入して,

$$(c_{n+1}+n+1)+(c_n+n)=2n+a$$
$$c_{n+1}+c_n=a-1\cdots(答)$$

(2)(1) で得られた漸化式を解く. この漸化式を

$$\left(c_{n+1}-\frac{a-1}{2}\right)=-\left(c_n-\frac{a-1}{2}\right)$$

と変形すれば,$\left\{c_n-\frac{a-1}{2}\right\}$ という数列は初項が $c_1-\frac{a-1}{2}=-\frac{a+1}{2}$ で, 公比が $-1$ の等比数列である. よって,

$$c_n=\frac{a-1+(-1)^n(a+1)}{2}$$

であるから,

$$b_n=\frac{a-1+(-1)^n(a+1)}{2}+n\cdots(答)$$

である.

(3)$b_n$ は以下のようにも書くことができる.

$$b_n=\begin{cases}n-1 & (n\text{が奇数のとき})\\ n+a & (n\text{が偶数のとき})\end{cases}$$

今,$n$ が偶数であるとすると,$a_n\leqq b_n\leqq a_{n+1}$ という条件式は,

$$a-1\leqq a\leqq a$$

となって, 自明な条件式になる. よって,$n$ が奇数のときを調べる. 同様に書き下すと,$n$ がキャンセルされて,

$$a-1\leqq -1\leqq a$$

という条件式に帰着できる. この条件より,$-1\leqq a\leqq 0\cdots(答)$ を得る.